DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

ESCUELAS TECNICAS RAGGIO

MATEMÁTICA 5

CUADERNILLO DE USO OBLIGATORIO

ALUMNO:

CURSO:

ESPECIALIDADES: AUTOMOTORES, CONSTRUCCIONES, MECÁNICA, INDUMENTARIA, ALIMENTOS, ORFEBRERIA, GRAFICAS, MUEBLE Y PUBLICIDAD

ESCUELA TÉCNICA RAGGIO

Programa de Matemática 5° Año

Unidades	Contenidos
Unidad 1 **INTEGRALES**	Repaso concepto de integral. Método de integración por fracciones simples. Problemas de aplicación adecuados a cada especialidad.
Unidad 2 **COMBINATORIA**	Números factoriales: definición y propiedades. Números combinatorios: definición y propiedades. Combinatorios complementarios. Triangulo de Tartaglia o Pascal: propiedades. Binomio de Newton: desarrollo de las potencias de un binomio. Calculo de un término del desarrollo. Permutaciones sin repetición. Permutaciones con repetición. Variaciones sin repetición. Variaciones con repetición. Combinaciones. Problemas de aplicación.
Unidad 3 **PROBABILIDAD**	Definición de Laplace. Propiedades. Probabilidad contraria. Sucesos independientes y dependientes. Probabilidad condicionada. Probabilidades totales y compuestas. Problemas.
Unidad 4 **ESTADÍSTICA**	Población, muestra, individuo. Variables estadísticas discretas y continuas. Tablas de frecuencias. Gráficos estadísticos. Medidas de centralización y de dispersión. Distribución normal.

Unidad N°0: Repaso

Integral indefinida

Anteriormente estudiamos que dada una función F(x),debíamos hallar su derivada F´(x)= f(x) ahora estudiaremos el problema inverso, dada una función f(x) es preciso hallar una función F(x) cuya derivada sea f(x), es decir, F´(x)= f(x)

En ese caso se dice F(x) es la primitiva de f(x).

Ejemplo: Sea f(x)=x^2, su primitiva sera F(x)= $\frac{x^3}{3}$ ya que F´(x)=x^2 ,pero observemos que esa función primitiva no es la única ya que F(x)= $\frac{x^3}{3} - 1$, F(x)= $\frac{x^3}{3} + 7$ tambien derivadas dan F´(x)=x^2 podemos decir entonces en general que difieren de una constante c, la primtiva sera F(x)= $\frac{x^3}{3} + c$, donde c es una constante arbitraria.

Si F(x) es una función primitiva de f(x), la expresión F(x) +c se llama integral indefinida de la función f(x) y se designa mediante el símbolo

$$\int \mathbf{f(x)dx = F(x) + c}$$

Si F´(x)=f(x), f(x) es el integrando.

Así la integral indefinida representa una familia de funciones y= F(x) +c

Algunas propiedades de las derivadas indefinidas

1. La integral indefinida de la suma de dos o más funciones es igual a la suma de sus integrales.

$$\int \left(f_{1(x)} + f_{2\,(x)} + f_{3\,(x)}\right) dx = \int f_{1(x)}dx + \int f_{2(x)}dx + \int f_{3(x)}dx$$

2. El factor constante en una integral se puede sacar fuera del signo integral.

Si a = constante

$$\int a.f(x)dx = a.\int f(x)dx$$

Tabla de integrales

1. $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$
3. $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c$
4. $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + c$
5. $\int e^x dx = e^x + c$
6. $\int \frac{1}{cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$
7. $\int \frac{1}{sen^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + c$
8. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
9. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c$
10. $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$

Para encontrar una primitiva de una función dada, basta con descomponerla (escribirla bajo forma de una combinación lineal) en funciones elementales cuyas primitivas son conocidas o se pueden obtener de una tabla de integrales, y luego aplicar las propiedades de las integrales.

Ejemplo 1: $\int(3\text{senx} + x^4 - 2x)dx$

Para resolverla aplicamos la propiedad 1 y 2

$$\int(3\text{senx} + x^4 - 2x)dx =$$

$$3.\int \text{senx}\, dx + \int x^4\, dx - 2\int x\, dx$$

Resulta usando la tabla: $-3.\cos x + \frac{x^5}{5} - x^2 + c$

Ejemplo 2: $\int \sqrt[3]{x^2}\, dx$

Llevamos a exponente fraccionario: $\int x^{2/3} dx$

Luego aplicamos la tabla el caso x^n, resulta: $\int x^{2/3}\, d\,x = \frac{3}{5}x^{5/3} + c$

1. **Aplica las reglas vistas hasta ahora para resolver:**

a) $\int(x^2 + x)dx$

b) $\int \frac{1}{z^3} dz =$

c) $\int(x+2)(x+3)dx =$

d) $\int(t + cost - 1)\, dt =$

e) $\int(-3senx + x^3)dx =$

f) $\int \sqrt{3x}\, dx =$

g) $\int(2t-1)^2\, dt =$

h) $\int \left(w + \frac{1}{w}\right) dw =$

i) $\int(e^x + 3^x)\, dx =$

j) $\int \frac{x^3+3x^2+x-4}{x} dx =$

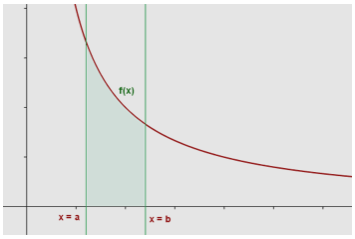
k) $\int(3x^2 + 2x + 1)dx =$

l) $\int 2^x\, dx =$

m) $\int \frac{1}{t} dt =$

<u>Integral definida</u>

La integral definida es una herramienta muy importante para el cálculo de áreas, una integral definida entre dos valores $x_1 = a$ y $x_2 = b$ representa el área que deja debajo de la curva f(x) y el eje de las abscisas (eje x) y las rectas verticales que pasan por $x_1 = a$ y $x_2 = b$



La integral definida se expresa $\int_a^b f(x)dx$

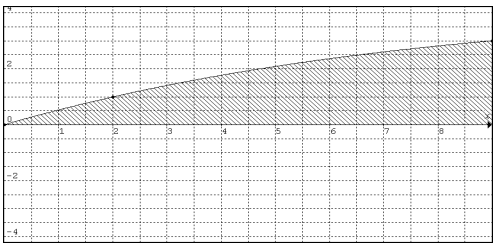
<u>Regla de Barrow</u>

La **regla de Barrow** dice que la integral definida de una función continua f(x) en un intervalo cerrado [a, b] es igual a la diferencia entre los valores que toma una función primitiva G(x) de f(x), en los extremos de dicho intervalo.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \left[G(x)\right]_a^b = G(b) - G(a)$$

Calcular las siguientes integrales definidas aplicando la **regla de Barrow**.

Ejemplo1: Área A= $\int_0^9 \sqrt{x}\,dx = \int_0^9 x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(\,9^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}) = 18$

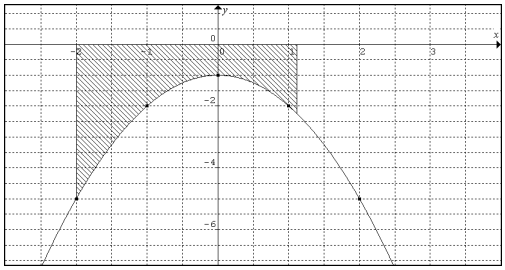


Cuando la función es negativa, el área que determina la curva con el eje x, se calcula agregando un signo negativo a la función.

Ejemplo 2: F(x)= $-x^2-1$ en el intervalo $x \in [-2;1]$

A= $\int_{-2}^{1} -(-x^2-1)dx = \int_{-2}^{1}(x^2+1)dx = \int_{-2}^{1} x^2\,dx + \int_{-2}^{1} dx = \frac{x^3}{3}\,|^{1}_{-2} + x\,|^{1}_{-2} =$

$\frac{1}{3}[1-(-8)] + [1-(-2)] = 6$



Ejemplo 3: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$

Respuesta: $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \left[2\sqrt{1+x}\right]_0^3 = 2(2-1) = 2$

Ejemplo 4: $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$

Respuesta: $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 2x\left(x^2+9\right)^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{1}{3}\left(x^2+9\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{1}{3}\left[(25)^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{98}{3}$

Ejemplo 5: $\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

Respuesta: $\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^3 2x\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[\sqrt{x^2-1}\right]_2^3 = \sqrt{8} - \sqrt{3}$

Ejemplo 6: $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

Respuesta: $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = [\operatorname{arc\,tg} x]_1^{\sqrt{3}} = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{3} - \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

Ejemplo 7: $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\,dx$

Respuesta: $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\,dx = \int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$

Área entre dos funciones

Para calcular el área comprendida entre dos funciones se integra la diferencia entre ambas $A=\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$ donde a y b son los puntos de intersección entre las curvas.

Ejemplo: calcular el área comprendida entre $f(x)=-x^2+6x$ y $g(x)= x^2$(Nota: debe colocarse en primer lugar la función superior)

Vemos los puntos de intersección igualando

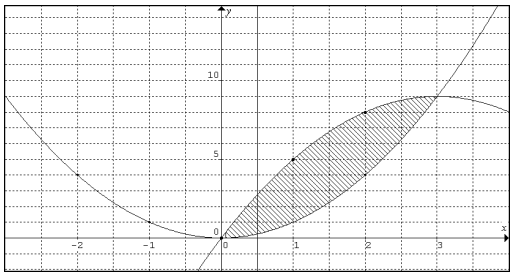
$$f(x)= g(x)$$

$$-x^2+6x=x^2$$

Se observa que se cumple la igualdad para $x_1=0$ y $x_2=3$

Entonces la integral se expresa: $\int_0^3 [(-x^2+6x)-x^2]dx = \frac{-2}{3}x^3 + 3x^2 |_0{}^3$

$$=-18+27-0 = 9$$



2. Calcular el área comprendida entre las curvas f(x) y g(x)

a. $\begin{Bmatrix} f(x) = x^2 - 2x \\ g(x) = -x + 6 \end{Bmatrix}$

b. $\begin{Bmatrix} f(x) = x^3 \\ g(x) = 3 + x.\frac{1}{3} \end{Bmatrix}$

c. $\begin{Bmatrix} f(x) = x^2 - 4 \\ g(x) = 5 \end{Bmatrix}$

d. $\begin{Bmatrix} f(x) = 2x + 3 \\ g(x) = 6 \end{Bmatrix}$

e. $\begin{Bmatrix} f(x) = \frac{1}{4}x^3 \\ g(x) = 4x \end{Bmatrix}$

Unidad N°1: Integrales

A veces las integrales no son ni sumas ni restas de integrales conocidas, y para ello se utilizan otros métodos, como: **Método de sustitución**, **Integración por partes o fracciones simples.**

Método de sustitución

Se utiliza un método cuando no se encuentra rápidamente la primitiva en tabla, y consiste en sustituir una de las funciones de la integral por otra variable, debiendo volver a reemplazar por la función original una vez resulta la integral.

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 1: $\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx$

$$\text{si } t = \operatorname{sen} x \Rightarrow dt = \cos x \, dx$$

Por lo tanto, en la integral queda: $\int t \, dt = \frac{t^2}{2} + c$

Reemplazando queda: $\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx = \frac{(\operatorname{sen} x)^2}{2} + c$

Para verificar su validez basta con derivar dicha función.

Ejemplo 2: $\int \frac{x}{1+x^2} \, dx$

Elegimos la sustitución: t = $1 + x^2$⇒dt = 2x dx,

Entonces reemplazamos: x dx=$\frac{dt}{2}$ y en la integral resulta:$\int \frac{dt}{t\,2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}$= $\frac{1}{2}$ ln t + c,

Volvemos a reemplazar y resulta:$\int \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + c$

1. **Resuelve aplicando el método de sustitución de ser posible:**

   a) $\int (3y^2 + 5y)^6 . (6y + 5) dy =$

   b) $\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx =$

   c) $\int sen(y^5). y^4 \, dy =$

   d) $\int \frac{1}{(3x+2)^{10}}$dx=

   e) $\int a.\sqrt{a^2 + 3} \, da =$

   f) $\int 3xe^{-x^2} \, dx =$

   g) $\int (2t - 3) sen(t^2 - 3t) \, dt =$

Método de Integración por partes

Se utiliza cuando la integral es el producto de dos funciones, sean u y v dos funciones derivables, entonces sabemos que la diferencial del producto (u.v) es d(u.v)= u dv + v du , luego si integramos ambos miembros: u.v= $\int u \, dv$ +$\int v \, du$

Esta expresión resolverá la integral: $\int u \, dv = u.v - \int v.du$ *, por lo tanto, deberemos elegir quien será **v** y quien **du**, veamos un ejemplo:

Ejemplo 1: Sea $\int x. \operatorname{sen} x \, dx$

Elegimos **u**= x ⇒**dv**= senx dx

Debemos calcular también **du y v** para completar en la formula *: **du**=1.dx y **v**=- cos*x*

Entonces reemplazando en *: $\int x. sen\, x \, dx = - x. cos\, x - \int 1 . (- cos\, x) dx$

$$\boxed{= -x.\cos x + \operatorname{sen} x + C}$$

Ejemplo 2: Sea $\int x.\ln x\,dx$

Se elige **u=** ln x y **dv**=x.dx

Entonces: **d u**=$\frac{1}{x}$ dx y **v**=$\frac{x^2}{2}$

Resulta al reemplazar en la formula *: $\int x.\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}.\ln x - \int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}\,dx$

Esta última integral queda simplificando las x : $\int \frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2}.\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{4}$

Entonces: $\boxed{\int x.\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}.\ln x - \frac{x^2}{4} + C}$

2. **Resuelve las siguientes integrales aplicando el método de integración por partes:**

a) $\int \sqrt[3]{x}\,.\,lnx\,dx =$

b) $\int z.e^z\,dz =$

c) $\int x^3.\,lnx\,dx =$

d) $\int (2x+3).\,e^x dx =$

e) $\int lnt\,dt =$

f) $\int x^2.\,e^x\,dx =$

g) $\int x^2\,.\,cosx\,dx =$

<u>Método de fracciones simples</u>

Este método es útil para resolver integrales indefinidas de funciones racionales cuando el polinomio del denominador, que tiene sus raíces reales, es de mayor grado que el del numerador.

El método de fracciones simples consiste en transformar la expresión de la función racional en una suma de otras expresiones racionales cuyas integrales se puedan obtener por el método de sustitución.

Si el polinomio del denominador de la función racional tiene raíces reales y simples, entonces, descomponemos la expresión de la función en tantos sumandos como raíces aquel tiene, y luego resolvemos la integral indefinida de cada sumando. Además, si el polinomio de denominador de la función racional tiene alguna raíz real **a** de multiplicidad **p,** entonces, a la expresión correspondiente a dicha raíz la descomponemos en **p** sumandos cuyos denominadores respectivamente son (x-a), $(x-a)^2$, …, $(x-a)^p$, y luego hallamos la integral indefinida de cada sumando.

A veces, para hallar la integral indefinida, no podemos utilizar el método de sustitución o de integración por partes, ya que la integral que quedaría por resolver es más complicada que la original.

Es por eso que utilizaremos el nuevo **método de fracciones simples,** veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1: $\int \frac{3x+2}{x^2-4}$=

Observemos el denominador de la función.

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

Si encontramos dos números reales A y B que verifique:

$$\frac{3x+2}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

Podemos escribir:

$$\int \frac{3x+2}{x^2-4}dx = \int \frac{A}{x-2}dx + \int \frac{B}{x+2}dx$$

Con lo cual las dos integrales se pueden resolver empleando el método de sustitución.

Hallemos entonces el número reales A y B:

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)} => \frac{3x+2}{x^2-4}=\frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

Luego, como los denominadores de ésta última expresión son iguales, entonces podemos afirmar lo siguiente:

$$A(x+2)+B(x-2)=3x+2 => Ax+2A+Bx-2B=3x+2 =>$$
$$=> (A+B)x+2A-2B=3x+2$$

Por lo tanto; como dos polinomios son iguales cuando todos sus coeficientes lo son, resulta que A+B=3 y 2A-2B=2, con lo cual es A=2 yB=1.

Luego, obtenemos que:

$$\int \frac{3x+2}{x^2-4}dx=\int \frac{2}{x-2}dx+\int \frac{1}{x+2}dx=$$
$$2\int \frac{2}{x-2}dx+\int \frac{1}{x+2}dx=2ln|x-2|+ln|x+2|+k$$

Ejemplo 2: $\int \frac{3x+2}{x^2-2x+1}=$

Nuevamente, observemos el denominador de la función.

$$x^2-2x+1=(x-1)^2$$

Luego, si queremos encontrar dos números reales A y B tales que:

$$\frac{3x+2}{x^2-2x+1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-1}=\frac{A+B}{x-1}$$

Los denominadores de la primera y de la última expresión no quedan iguales. Por lo tanto, no podemos igualar los denominadores.

Busquemos, entonces otra opción.

Hallemos dos números reales A y B tales que:

$$\frac{3x+2}{x^2-2x+1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}$$

Ahora sí, los denominadores de la primera y de la última expresión son iguales, podemos asegurar que:

$$A(x-1)+B=3x+2 => Ax-A+B=3x+2 => A=3\ y-A+B=2 => A=3\ y\ B=5$$

Luego, obtenemos que:

$$\int \frac{3x+2}{x^2-2x+1}dx=\int \frac{3}{x-1}dx+\int \frac{5}{(x-1)^2}dx=$$

$$=3\int \frac{1}{x-1}dx+5\int \frac{1}{(x-1)^2}dx=3ln|x-1|+k_1+5\int \frac{1}{(x-1)^2}dx=$$

Para calcular la última integral, utilizamos el método de sustitución.

Al considerar *t=x-1* resulta *dt=dx*. Entonces:

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{t^2}\,dt = \int t^{-2}\,dt = \frac{t^{-1}}{-1} + k_2 = \frac{-1}{x-1} + k_2$$

Reemplazando en la expresión anterior:

$$\int \frac{3x+2}{x^2-2x+1}\,dx = 3ln|x-1| - \frac{5}{x-1} + k$$

El **método de fracciones simples** se puede utilizar tanto para resolver integrales indefinidas, así como también puede utilizarse para hallar integrales definidas.

Algunas integrales pueden resolverse por más de un método, otras, combinando varios, y otras, en cambio, no pueden hallarse por ninguno de los métodos que hemos estudiado.

3. **Hallen las siguientes integrales indefinidas:**

a) $\int \frac{3}{a^2+3a}\,da =$

b) $\int \frac{3x+1}{x^2+4x+3}\,dx =$

c) $\int \frac{1}{z^2-4}\,dz =$

d) $\int \frac{x-1}{x^3+x^2-6x}\,dx =$

e) $\int \frac{3z+5}{z^3-z^2-6z}\,dz =$

f) $\int \frac{5x+3}{2x^2-6x+4}\,dx =$

g) $\int \frac{3e^x}{e^{3x}+4e^{2x}-5e^x}\,dx =$

h) $\int \frac{7}{v^2+3v-10}\,dv =$

4. **Integrar:**

a) $\int x.cosxdx =$

b) $\int \frac{3x^2+5}{x^3+5x}\,dx =$

c) $\int x^{-\frac{1}{2}}.lnxdx =$

d) $\int 3sen^2x.cosx\,dx =$

e) $\int (senz)^5.cosz\,dz =$

f) $\int senx.e^x\,dx =$

i) $\int \frac{5x^2+3x-1}{x^3-2x^2+x-2}\,dx =$

g) J) $\int \frac{5z+1}{z^2+z-2}\,dz =$

5. **Algunos problemas para usar integrales:**

a) Un auto parte de una ciudad ubicada a 20km de buenos Aires rumbo a Mar del Plata. La función $v(t) = 9t^2 + 8$ relaciona la velocidad instantánea del auto (v), medida en kilómetros por hora, con el tiempo de viaje (t), medido en horas.

   I. ¿Cuál es la velocidad del auto después de 3 horas de viaje?

   II. Encuentren una función que permita calcular la distancia a la que el auto se encuentra de Buenos Aires en cada instante del viaje.

b) Un autito de juguete parte a 20cm del inicio de una pista de carrera y se desplaza con trayectoria recta. La función *a(t)=sen(5t)* relaciona la aceleración (a) del autito, medida en cm/s^2, con el tiempo de marcha (t), medido en s.

   Hallar la función d(t) que permita calcular, en cada instante, la distancia a la que se encuentra el autito del inicio de la pista de carrera.

Unidad Nº 2: Combinatoria

Factorial de un número

El factorial (n!) de un número natural n es el producto de todos los números naturales desde 1 hasta n.

$$n! = 1.2.3\ldots (n-2).(n-1).n \qquad y \qquad 0! = 1$$

Propiedad:

El factorial de un número es igual al factorial de su anterior por dicho número.

$$n! = \underbrace{1.2.3\ldots (n-2).(n-1)}_{(n-1)!}.n = (n-1)!.n$$

Ejemplo: 6! = 5!.6 = 4!.5.6 = 3!.4.5.6 = 2!.3.4.5.6 = 1.2.3.4.5.6

Esta propiedad permite simplificar expresiones:

$$\frac{5!}{3!} = \frac{3!.4.5}{3!} = 20$$

Permutaciones

Una permutación es una agrupación de cierta cantidad de elementos en la cual dos grupos son distintos cuando sus elementos están ordenados de diferente forma.

La cantidad de permutaciones (sin repetición) que se puede hacer con n elementos es igual a *n!*

$$P_n = n!$$

Ejemplo:

¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar con el 3, el 2 y el 7?

3!=6

Rta: Se pueden armar 6 números distintos.

Permutaciones con repetición

Sea un conjunto de n elementos, de entre los cuales tenemos a elementos indistinguibles entre sí, b elementos indistinguibles entre sí, c elementos indistinguibles entre sí, etc. Cada ordenación de estos elementos se denominará permutación con repetición. El número de permutaciones con repetición es:

$$RP_n^{a,b,c,\ldots} = \frac{n!}{a!b!c!\ldots}$$

Ejemplo:

¿Cuántas palabras con sentido o sin él pueden formarse con las letras PATATA?

Tenemos tres veces la letra A, dos veces la T y una vez la P.

Por tanto, serán:

$$RP_6^{3,2,1} = \frac{6!}{3!2!1!} = 60$$

Rta: Se pueden formar 60 palabras.

Variaciones

Una variación de n elementos tomados de a m, es la cantidad de grupos de m elementos que se pueden formar con los n elementos.

En general:

$$V_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Ejemplo:

En una carrera de autos participan 19 corredores. ¿De cuántas formas posibles se pueden entregar los tres primeros premios?

$$V_{19,3} = \frac{19!}{(19-3)!} = 19.18.17 = 5814$$

Rta: Hay 5814 formas posibles.

Variaciones con repetición

Sea un conjunto de n elementos. Supongamos que se trata de ordenar r elementos que pueden estar repetidos. Cada ordenación es una variación con repetición. El número de variaciones con repetición para un conjunto de n tomados de r en r es:

$$RV_n^r = n^r$$

Ejemplo:

En una urna tenemos cinco bolas numeradas del 1 al 5. Se extraen tres bolas sucesivamente con reposición (devolviendo cada vez la bola a la urna). ¿Cuántos resultados distintos es posible obtener?

Se trata de variaciones con repetición de un conjunto de 5 bolas tomadas de 3 en 3.

$$RV_5^3 = 5^3 = 125$$

Rta: Es posible obtener 125 resultados.

Combinaciones

Una combinación de n elementos tomados de m es la cantidad de grupos distintos de m elementos (en los que no importa el orden) que se obtiene con los n elementos siempre que cada grupo difiera en por lo menos un elemento.

$$C_{m=}^n \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Ejemplo:

¿Cuántos grupos distintos de 5 personas se pueden armar con 7 personas?

$$C_5^7 = \binom{7}{5} = \frac{7!}{5!\,(7-5)!} = \frac{7!}{5!.2!} = 21$$

Rta: Se pueden armar 21 grupos distintos.

Propiedades de los números combinatorios:

1) $\binom{n}{0} = 1$

2) $\binom{0}{0} = 1$

3) $\binom{n}{n} = 1$

4) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

5) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

Triángulo de Pascal:

Consideremos el siguiente esquema triangular:

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$$

De acuerdo con la última propiedad, cada número ubicado en el interior del triángulo es igual o la suma de los 2 números inmediatos en la fila anterior.

Así, por ejemplo:

$$\binom{3}{1} = \binom{2}{0} + \binom{2}{1}$$

Y como, por otra parte, los números que están sobre los lados son todos iguales a 1, de acuerdo con las propiedades 1) y 3), resulta inmediato el cálculo de los números que forman el triángulo.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

……..

Esta disposición numérica se conoce con el nombre de triángulo de Pascal.

Entre los números que forman el triángulo se dan muchas relaciones interesantes.

Por ejemplo, si sumamos los elementos de cada fila empezamos desde la primera y siguiendo así en forma ordenada con cada una de las filas siguientes, obtenemos las sucesivas potencias de 2 en orden creciente.

n=0				1				2^0
n=1			1		1			2^1
n=2		1		2		1		2^2
n=3	1		3		3		1	2^3

……

Es decir:

Para la fila correspondiente a n=3, se tiene:

$$1 + 3 + 3 + 1 = 2^3$$

0 bien:

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 2^3$$

Para la fila correspondiente a n=4:

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4$$

Y en general se demuestra que:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

La fórmula suele indicarse:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Donde $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ se lee: suma desde k=0 hasta K=n del número $\binom{n}{k}$ e indica la suma de todos los términos que se obtienen dando sucesivamente a K los valores de 0 a n.

Ejemplo: Calcular

$$\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} = 2^5 = 32$$

Es decir, desarrollando el primer miembro:

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 32$$

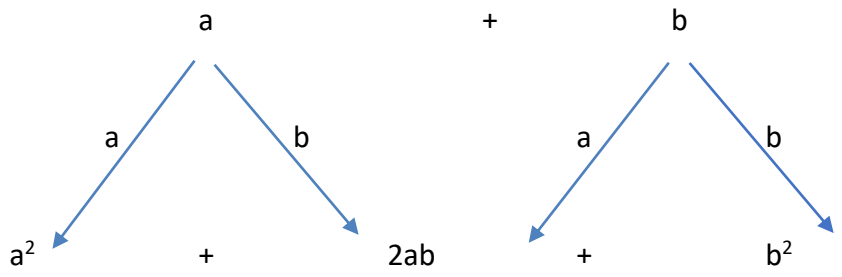
<u>Binomio de Newton</u>

Dados los números reales a, b distintos de cero vamos a hallar el desarrollo de $(a+b)^n$ para cualquier $n \in N$

Si n=1 $\quad (a+b)^1 = a + b$

Si n=2 $\quad (a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$

Podemos disponer las operaciones hechas de la siguiente manera:



Si para cada valor de n escribimos en fila los coeficientes numéricos de $(a+b)^n$ obtenemos el triángulo de Pascal.

En general se demuestra que:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1}b^2 + \binom{n}{n} b^n$$

O bien, utilizando el símbolo de sumatoria:

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k}$$ **BINOMIO DE NEWTON**

Teniendo en cuenta el desarrollo, observamos que:

El término que ocupa el 1er lugares $T_1 = \binom{n}{0} a^n$

El término que ocupa el 2do lugares $T_2 = \binom{n}{1} a^{n-1}b$

El término que ocupa el 3er lugares $T_3 = \binom{n}{2} a^{n-2}b^2$ y así sucesivamente.

El término que ocupa el lugar h es:

$$T_h = \binom{n}{h-10} a^{n-(h-1)}b^{h-1}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. ¿Cuántos números de 3 cifres distintas se pueden escribir con los 3 primeros números pares?
2. ¿De cuantas formas distintas se pueden sentar 4 amigos en un auto, si todos pueden manejar?
3. ¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar con los dígitos, 1,3,5,7,9?
4. ¿Cuántas señales distintas se pueden armar utilizando 3 de 12 banderas diferentes?
5. ¿Cuántas palabras de 3 letras se pueden armar con las letras de la palabra VERANO?
6. ¿Cuántas claves de 4 dígitos se pueden armar con las cifras del 0 al 9?
7. En un curso de 20 alumnos la maestra quiere armar grupos de 4 alumnos. ¿De cuántas formas distintas los puede agrupar?
8. Calcular la cantidad de anagramas que se pueden formar con las palabras:
   a. MANZANAS
   b. BANANA
9. En una clase de 35 alumnos se quiere elegir un comité formado por tres alumnos. ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar?

10. A una reunión asisten 10 personas y se intercambian saludos entre todos. ¿Cuántos saludos se han intercambiado?

11. ¿Cuántos triángulos determinan 5 puntos del plano dispuestos de manera tal que no haya tres alineados?

12. En una casa hay 4 puertas al exterior. ¿De cuántas maneras distintas puede quedar la casa abierta?

13. Desarrollar las siguientes potencias, utilizando el Binomio de Newton:

a) $(3+x)^4 =$ b) $(x+2y)^5 =$ c) $\left(a-\frac{1}{2}\right)^6 =$

14. Calcular el 5to término de: $(-x^2+y)^{15}$

RESUMEN

		Agrupaciones	Sin repetición	Con repetición
¿Importa el orden?	Si	**Variaciones** (Tomamos algunos elementos)	$V_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$	$RV_n^r = n^r$
		Permutaciones (Tomamos todos los elementos)	$P_n = n!$	$RP_n^{a,b,c,\ldots} = \frac{n!}{a!b!c!\ldots}$
	No	**Combinaciones** (Tomamos algunos elementos)	$C_{m=}^n \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$	

Binomiode Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Unidad N°3: Probabilidad

Conceptos básicos

Para comenzar la unidad veremos algunos conceptos básicos de esta rama de la matemática con la que vamos a trabajar:

- **Experimento:** es toda acción o procedimiento repetible indefinidas veces en condiciones similares mediante el cual se generan resultados.
- **Fenómeno:** su ocurrencia no requiere de la intervención humana y puede ser observado sólo si ocurre.
- **Experimento aleatorio:**nose puede predecir el resultado de una repetición, pero se conoce el conjunto de todos los resultados posibles y si se observa un gran número de veces, cada uno de los resultados aparece en una proporción definida, es decir, hay cierta regularidad en los resultados.
- **Espacio muestral:**es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento o fenómeno aleatorio.
- **Punto muestral:**es un elemento del espacio muestral.
- **Suceso:**es un subconjunto cualquiera del espacio muestral.
- **Evento simple o elemental:**resultado de un experimento que no puede descomponerse en una combinaciónde otros.
- **Evento compuesto:** consta o está formado por 2 o más eventos simples.
- **Suceso cierto o seguro:**ocurre en cualquier realización del experimento o fenómeno aleatorio.
- **Suceso imposible:** no ocurre en ninguna realización del experimento o fenómeno aleatorio.
- **Sucesos incompatibles o mutuamente excluyentes:** no comparten resultados comunes, es decir no existeningún punto muestral que pertenezca a ambos.
- **Sucesos complementarios:**dado un evento A se llama complemento de A al evento que ocurre si y sólo si Ano ocurre.

Ejemplo:

En un criadero hay diez perros, cuatro de raza caniche y seis de raza pequinés. De los caniche, dos son blancos y los restantes grises, y de los pequineses, tres son negros y los restantes blancos. Se extrae al azar, de este conjunto de animales, uno, y se mira raza y color de pelaje.

El conjunto de resultados posibles de este experimento aleatorio, es decir el **espacio muestral** es:

$$S = \{PB, PN, CB, CG\}$$

Siendo los **puntos muestrales** para este experimento:

PB: pequinés blanco
PN: pequinés negro
CB: caniche blanco
CG: caniche gris

Los siguientes son ejemplos de **eventos** asociados con el experimento definido, es decir, subconjuntos del espacio muestral S.

A = { el animal elegido es perro }
B = { el animal elegido es perro maltés }

C = { el animal elegido es perro pequines }
D = { el animal elegido es negro }
E = { el animal es perro caniche}

Otra forma de definir los mismos eventos es enumerando sus puntos muestrales, es decir por extensión:

A = {PB, PN, CB, CG}
B = { }
C = { PB, PN }
D = { PN }
E = { CB, CG }

Observaciones:

a) A contiene a todos los puntos del espacio muestral, siempre que hagamos el experimento, ocurre. Entonces A es un **evento cierto o seguro**.
b) B no contiene a ningún punto del espacio muestral, nunca ocurre. Entonces B es un **evento imposible**.
c) D contiene un único punto del espacio muestral, se dice que D es un **evento elemental**.
d) C contiene dos puntos del espacio muestral, se dice que C es un **evento compuesto**.
e) D y E no pueden ocurrir simultáneamente, se dice que E y D son **mutuamente excluyentes o incompatibles**.
f) C y E son también mutuamente excluyentes pero además son exhaustivos, es decir que entre ambos eventos cubren todo el espacio muestral. Por lo tanto, cuando uno de ellos no ocurre, necesariamente ocurre el otro. Decimos que C y E son **eventos complementarios**.

Notación:

- Los sucesos, por ser conjuntos, se simbolizan con letras mayúsculas. Ej.: A, B, C.
- Dado que traducimos del lenguaje coloquial (que es muy amplio) al lenguaje simbólico (más estricto que elanterior), una expresión simbólica puede provenir de diferentes expresiones coloquiales. Por ejemplo: “CN”puede provenir de decir “caniche negro”, que es equivalente a decir que sea “caniche **y** negro” o “caniche
pero negro”.Por lo tanto, no debemos “atarnos” a palabras y/o conjunciones de castellano para expresarnossimbólicamente.
- A partir de eventos conocidos suelen definirse nuevos eventos, por ejemplo:

✓ que ocurra el evento A y al mismo tiempo ocurra el evento B.
A esta combinación de eventos se la denomina **intersección** y se la denota **A** ∩ **B.**

✓ que ocurran el evento A o el evento B.
A esta combinación de eventos se la denomina **unión** y se la denota **A** ∪**B**

✓ que no ocurra el evento A.
A este nuevo evento se lo denomina **complemento** y se la denota **Ac** o bien **A’** o $\overline{A}$

Dado un experimento y un espacio muestral S asociado al experimento, el objetivo de la teoría de la probabilidad es asociar a cada evento ***A*** un número *P*(***A***), llamado probabilidad de ***A***, que dé una medida precisa de la chance o posibilidad de que ocurra el evento ***A.***

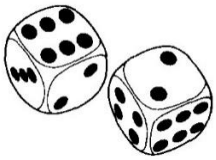
Teoría Clásica:

Dado un experimento o fenómeno aleatorio, con espacio muestral asociado S, y un evento A, de este espacio muestral; se llama probabilidad de que ocurra el suceso A al cociente entre el número de puntos muestrales de A (resultados favorables) y el total de puntos muestrales de S (resultados posibles), siempre que todos sean equiprobables.

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{cantidad\ de\ casos\ favorables\ A}{cantidad\ de\ casos\ posibles}}$$

- La probabilidad toma valores entre 0 y 1 (o expresados en tanto por ciento, entre 0% y 100%):
- El valor cero corresponde al suceso imposible; ejemplo: lanzamos un dado al aire y la probabilidad de que salga el número 7 es cero.
- El valor uno corresponde al suceso seguro, ejemplo: lanzamos un dado al aire y la probabilidad de que salga cualquier número del 1 al 6 es igual a uno (100%).
- El resto de sucesos tendrá probabilidades entre cero y uno: que será tanto mayor cuanto más probable sea que dicho suceso tenga lugar.

Ejemplo:



a) Probabilidad de que al lanzar un dado salga el número 2: el caso favorable es tan sólo uno (que salga el dos), mientras que los casos posibles son seis (puede salir cualquier número del uno al seis).

Por lo tanto:
$\boldsymbol{P(2) = \frac{1}{6}}$=0,1666… (o lo que es lo mismo, 16,6%)

b) Probabilidad de que al lanzar un dado salga un número par: en este caso los casos favorables son tres (que salga el dos, el cuatro o el seis), mientras que los casos posibles siguen siendo seis.

Por lo tanto:

$\boldsymbol{P(par) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}}$=0,5 (o lo que es lo mismo, 50%)

c) Probabilidad de ganarse el premio mayor de una lotería en la que juegan 100.000 números: tan sólo un caso favorable, el número que jugamos, frente a los 100.000 casos posibles.

Por lo tanto:

$\boldsymbol{P(par) = \frac{1}{100.000}}$=0,00001 (o lo que es lo mismo, 0,001%)

Probabilidad condicional

Cuando nos interesa la probabilidad de que ocurra un evento A, pero disponiendo de la información de que ha ocurrido el evento B, se dice que queremos calcular la probabilidad de A condicional a B.

P(A/B) se lee "probabilidad de A condicional a B" y se define como el cociente entre la probabilidad conjunta de A con B, y la probabilidad de B siempre que B no sea el evento imposible.

Simbólicamente:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\ con\ P(B) > 0$$

Si retomamos el ejemplo de los perros donde teníamos diez perros, cuatro caniches y seis pequineses, delos caniches, dos son blancos y los restantes grises; y de los pequineses, tres son negros y los restantesblancos. Queremos saber cuál es la probabilidad de que sea caniche sabiendo que es blanco. Si bien el conjunto de resultados posibles de este experimento aleatorio, es decir el espacio muestral original es:

S = {PB, PN, CB, CG}

En este caso sólo nos interesan los puntos muestrales donde el perro extraído es blanco. Luego, el conjunto de resultados posibles es

B = {PB, CB}

Y dentro de este nuevo conjunto de posibilidades nos interesa la probabilidad de que sea caniche. Comohay cinco perros blancos, dos caniches y tres pequineses, la probabilidad de que sea caniche siendo que esblanco será:

P(C/B)= 2/5

Esta probabilidad depende de las siguientes tres probabilidades:

P(B) = 5/10 probabilidad de que sea blanco
P(CB) = P(C ∩ B) = 2/10 probabilidad de que sea caniche y blanco

$$P(C/B)=\frac{P(C\cap B)}{P(B)}=\frac{2/10}{5/10}=\frac{2}{5}=0{,}4$$

<u>Teorema de la Suma</u>

Si **A** y **B** son dos eventos cualesquiera de un espacio muestral S, y ocurre que P(**A**) + P(**B**) supere a 1, aesto se debe a que la probabilidad de la intersección se está sumando dos veces.
¿Cómo debemos calcular entonces la probabilidad de la unión de estos sucesos?
Debemos sumar las probabilidades de ambos eventos y restar la probabilidad de la intersección para quequede sumada una sola vez. Simbólicamente podemos expresar la propiedad:

$$P(\mathbf{A}\cup\mathbf{B}) = P(\mathbf{A}) + P(\mathbf{B}) - P(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})$$

<u>Teorema del producto</u>
De la definición de probabilidad condicional, se desprende la llamada regla o teorema del producto.

$$P\left({}^{A}/_{B}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow P(A\cap B)=P(B).P\left({}^{A}/_{B}\right)$$

<u>Independencia de sucesos aleatorios</u>
Cuando la ocurrencia de un evento no afecta la probabilidad de ocurrencia de otro, en dos intervenciones delazar, se dice que ambos son eventos independientes.
Simbólicamente:
P(A/B) = P(A)
lo que es equivalente a decir: $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)$
o bien *P(A∩B) = P(A) . P(B)*

Por ejemplo: si queremos hacer dos extracciones sucesivas de un mismo conjunto, podemos reponer el primer elemento antes de la segunda extracción, o no reponerlo.
Si se lo repone, la probabilidad de un evento dado es la misma en la primera y en la segunda extracción, mientras que si no se lo repone, la probabilidad en la segunda extracción está determinada por el resultado de la primera.
Decimos entonces que cuando se repone, las extracciones son **independientes** y cuando no se repone las extracciones son **dependientes**.

Ejemplo:

1- Dos campos con equinos en pastoreo clasificados según su pelaje presentan la siguiente distribución:

	campo 1	campo 2
Zaino	9	6
Bayo	11	6
Rosillo	5	13

1.1) Se selecciona un equino al azar. Calcular la probabilidad de que:
a) sea Zaino,
b) sea Zaino y del campo 1,
c) sea Zaino o del campo 1,
d) sea Rosillo, sabiendo que es del campo 1.

1.2) Si se seleccionan dos equinos al azar:
1.2.1) Con reposición
Calcular la probabilidad de que sean:
a) ambos Bayos,
b) el primero Bayo y el segundo Zaino,
c) uno Bayo y el otro Zaino,
d) uno Bayo y del campo 1; y, el otro, Zaino y del campo 2.
1.2.2) Sin reposición
Calcular las probabilidades pedidas en 1.2.1)

SOLUCIÓN
Para facilitar los cálculos agregamos una fila y una columna con los totales de animales que hay en cada campo y de cada pelaje

	campo 1 (C1)	campo 2 (C2)	
Zaino (Z)	9	6	15
Bayo (B)	11	6	17
Rosillo (R)	5	13	18
	25	25	50

1.1)
a) $p(Z)=\frac{15}{50}=\frac{3}{10}=0,30$

b) Es la probabilidad de una intersección y se puede calcular directamente observando la tabla y aplicando la teoría clásica de probabilidades.

$$p(Z\cap C1)=\frac{9}{50}=0,18$$

O por definición, considerando a cualquiera de los dos sucesos como el primero. Si primero se observa el pelaje y luego de qué campo proviene:

$$p(Z \cap C1) = p(Z) * p(C1/Z) = \frac{15}{50} * \frac{9}{15} = 0{,}18$$

Nota: Observar que dado que interviene una única vez el azar no se multiplica por dos.

c) Como puede darse que el animal sea Zaino y también del campo 1 los dos sucesos Z y C1 no son mutuamente excluyentes lo que lleva a la siguiente expresión y correspondiente cálculo

$$p(Z \cup C1) = p(Z) + p(C1) - p(Z \cap C1) = \frac{15}{50} + \frac{25}{50} - \frac{9}{50} = \frac{31}{50} = 0,62$$

d) Lo que se sabe (equivalente a decir que está dado) es que "...es del campo 1" y lo aleatorio es que "...sea rosillo", por lo tanto $p(R/C1) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = 0,20$ (por lectura directa de tabla), tomando en cuenta que la condición restringe la cantidad de casos posibles.

Por fórmula:

$$p(R/C1) = \frac{p(R \cap C1)}{p(C1)} = \frac{5/50}{25/50} = \frac{5}{25} = 0,20$$

1.2) Dos equinos al azar

12.1) Con reposición

a) Como la característica Bayo es la misma para los dos animales seleccionados, no se ven diferencias si se los permuta o cambia de lugar por lo tanto NO multiplicamos por dos.

$$p(BB) = \frac{17}{50} * \frac{17}{50} = \frac{289}{2500} = 0{,}1156$$

b) Como indica el orden en que deben ocurrir los sucesos sólo hay una forma de calcularlo

$$p(BZ) = \frac{17}{50} * \frac{15}{50} = \frac{255}{2500} = 0{,}1020$$

c) Al no indicar el orden en que deben ocurrir los sucesos, el planteo tiene dos formas de presentarse

$$p(BZ) + p(ZB) = 2p(BZ) = 2 * \frac{17}{50} * \frac{15}{50} = 0,2040$$

d) Como no aclara orden puedo plantear un caso y multiplicar por las permutaciones, es decir, por la cantidad de cambios de lugar diferentes que se pueden dar. En este caso debo multiplicar por 2 debido a que sólo se pueden dar en dos órdenes: primero BC1 y luego ZC2, o primero ZC2 y luego BC1.

$$p(BC1 \cap ZC2) = 2 * \frac{11}{50} * \frac{6}{50} = 0,0528$$

1.2.2) Sin reposición

En este caso debemos recordar que:

- para calcular la probabilidad del primer elemento, se razona de la misma manera que lo que se hizo con reposición.

- en el cálculo de la probabilidad del segundo elemento que se selecciona, y en los sucesivos, el denominador (cantidad de elementos que pueden ser seleccionados) siempre van disminuyendo.

a) En este caso cuando se selecciona el segundo elemento y el primero no se repuso vamos a tener también un caso favorable menos

$$p(BB)=\frac{17}{50}*\frac{16}{49}=0{,}1110$$

b) $p(BZ)=\frac{17}{50}*\frac{15}{49}=\frac{255}{2450}=0{,}1041$

c) $p(BZ)+p(ZB)=2*\frac{17}{50}*\frac{15}{49}=0{,}2082$

d) $p(BC1\cap ZC2)=2*\frac{11}{50}*\frac{6}{49}=0{,}0539$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1) Un estudiante quiere responder a la suerte dos preguntas en un examen de falso y verdadero. ¿Cuál sería el espacio muestral de este problema?

2) En una sala de clases hay 20 mujeres y 12 hombres. Si se escoge uno de ellos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona escogida sea hombre?

3) Se extrae una carta al azar de una baraja de naipe español (48 cartas: oro, copa, espada y basto). Calcular la probabilidad del suceso “sacar una carta que no sea oro”.

4) Extraemos dos cartas de una baraja española y vemos de qué palo son.

a) ¿Cuál es el espacio muestral? ¿Cuántos elementos tiene?

b) Describe los sucesos: A = "Las cartas son de distinto palo" B = "Al menos una carta es de oro" C = "Ninguna de las cartas es de espada" escribiendo todos sus elementos.

c) Halla los sucesos $B \cup C$ y $B' \cap C$.

5) En una ciudad de 100 habitantes, el 40% de la población tiene pelo castaño, el 25% tiene ojos verdes y el 15% tiene pelo castaño y ojos verdes.

1.1) Si al escoger una persona al azar. Calcular la probabilidad de que:

a. tenga ojos verdes
b. tenga pelo castaño y no tenga ojos verdes
c. tenga ojos verdes o pelo castaño

1.2) Si seleccionamos a dos personas

1.2.1) Con reposición

Calcular la probabilidad de que sean:

a. ambos tengan ojos verdes
b. el primero tenga ojos verdes y el segundo tenga pelo castaño
c. ambos tengan ojos verdes y pelo castaño

1.2.2) Sin reposición

Calcular las probabilidades pedidas en 1.2.1)

6) Una agencia de ventas de motocicletas realizó un estudio sobre accidentes de tránsito en los que se vieron involucradas las marcas A, B y C. Sobre una base de 100.000 motos, se recopilaron los siguientes resultados:

	Marca A	Marca B	Marca C	Total
Accidente grave (ag)	650	200		1000
Accidente no grave (ang)		19800	29850	
Total	50000		30000	100000

1.1) Complete la tabla y calcule:

a. P(ag)
b. P(ang/A)
c. P(ag/B)
d. P(ag/C)
e. ¿Qué marca es más segura?
f. Si se elige una moto que no tuvo accidentes graves, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca C?

7) En un viaje organizado por Europa para 120 personas, 48 de los que van saben hablar inglés, 36 saben hablar francés, y 12 de ellos hablan los dos idiomas. Escogemos uno de los viajeros al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que hable alguno de los dos idiomas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que hable francés, sabiendo que habla inglés?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que solo hable francés?

8) En una clase de 30 alumnos hay 18 que han aprobado matemáticas, 16 que han aprobado inglés y 6 que no han aprobado ninguna de las dos. Elegimos al azar un alumno de esa clase:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado inglés y matemáticas?

b) Sabiendo que ha aprobado matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado inglés?

c) ¿Son independientes los sucesos "Aprobar matemáticas" y "Aprobar inglés"?

9) José saca al azar 2 caramelos de una bolsa que contiene 40 caramelos masticables y 20 caramelos duros. ¿cuál es la probabilidad de que:

a) Ambos caramelos sean masticables?
b) Uno solo de los caramelos sea masticable?
c) Por lo menos uno de los dos caramelos sea masticable?

10) Un grupo de 60 perros fue clasificado como indica el cuadro:

	Cachorro	Adulto
Negro	6	9
Marrón	12	23
Blanco	2	8

Calcular:

a) la probabilidad de seleccionar:

a.1) un perro negro del grupo de cachorros;

a.2) un cachorro negro.

Dar un ejemplo de dos eventos mutuamente excluyentes y de uno que no lo sea.

b) si se seleccionan dos perros, ¿cuál es la probabilidad de que:

b.1) uno sea un cachorro marrón y el otro un adulto negro?

b.2) el primero sea adulto blanco y el segundo un perro marrón?

11) Un empleado de contaduría necesita una birome negra y una roja para realizar un trabajo encargado por su jefe. Se dirige entonces a la caja donde guardan las biromes destinadas a utilizarse en la oficina y extrae dos biromes al azar. Sabiendo que en la caja había 15 biromes verdes, 8 biromes rojas, 24 biromes azules y 13 biromes negras mezcladas, calcular la probabilidad de que:

a) haya extraído exactamente las que necesitaba para poder realizar el trabajo que le han encargado.

b) haya extraído dos biromes del mismo color.

c) por lo menos una de las dos biromes que extrajo le sirva para realizar el citado trabajo.

12) En un edificio de departamentos hay 12 departamentos habitados por sus propietarios, 10 habitados por inquilinos y 3 desocupados. Un inspector de la compañía que suministra gas elige dos de estos

departamentos al azar para verifica el funcionamiento de las instalaciones. Calcular las siguientes probabilidades acerca de los dos departamentos elegidos:

a) que los dos se encuentren habitados por sus propietarios.

b) que al menos uno de los dos se encuentre habitados por inquilinos.

c) que uno de los dos se encuentre habitado por su propietario y el otro por inquilinos.

d) que solamente uno de los dos se encuentre desocupado.

e) que los dos se encuentren desocupados.

f) que ninguno de los dos se encuentre desocupado.

13) En un diario comentan que los accidentes automovilísticos en las rutas son más probables actualmenteque hace diez años. El diario de la competencia informa que este año la probabilidad de que suceda unaccidente automovilístico para las vacaciones de invierno es de 1,5; por lo que aconseja prudencia.

Opine sobre lo publicado en este último. Justifique su opinión.

Unidad N°4:Estadística Descriptiva

La estadística tiene dos propósitos de estudio:

a) Resumir, representar y analizar un conjunto de datos. De este grupo de tareas se ocupa **la estadística descriptiva**.

b) Estimar valores poblacionales desconocidos, tomar decisiones sobre un conjunto de datos mayor al disponible. De este grupo de tareas se ocupa **la estadística inferencial.**

Se denomina **POBLACIÓN** a un conjunto de elementos que tienen una o más características en común.

Una población puede ser finita, infinita numerable o infinita no numerable.

Se denomina **MUESTRA** a cualquier subconjunto de elementos seleccionados de una población previamente definida.

Esta selección se realiza generalmente de acuerdo con una regla o plan.
El proceso que nos permite la extracción de una muestra a partir de una población se denomina **MUESTREO**.

Se dice que una muestra es representativa cuando las unidades de muestreo seleccionadas mantienen en conjunto las características de la población en estudio. Para lograr esta representatividad suelen utilizarse métodos de muestreo como, por ejemplo, el aleatorio.

Razones para muestrear

1) Las muestras pueden estudiarse con más rapidez que las poblaciones.
2) El estudio de una muestra es menos costoso que el de la población entera.
3) En la mayor parte de las situaciones el estudio de una población entera es imposible (por la destrucción o agotamiento del objeto que se está estudiando o por ser infinita).
4) Si cada elemento de la población tiene una probabilidad conocida de pertenecer a la muestra pueden hacerse generalizaciones respecto a la población.

Entonces, al muestrear podemos ver que, si la muestra está bien tomada, se puede esperar que represente a la población. Además,

• las muestras aleatorias seleccionadas de la misma población tienen mucho en común pero no se puede esperar que sean exactamente iguales.

• una muestra grande diferirá menos de la población de la que se extrae, que una muestra pequeña, ya que cuando las muestras aumentan de tamaño disminuye la variabilidad.
• se llega a un punto en que el aumento de información no justifica el aumento de los costos.

Unidad de observación o unidad experimental: Objeto o conjunto de objetos, de la población en estudio, de donde obtenemos un valor particular de la variable.

Variable: Característica de interés observable sobre cada elemento de una población.
Los términos: variable, variable aleatoria o variable del azar, son características que pueden cambiar su valor en las distintas unidades de observación.

Por ejemplo: si la variable es peso de un lechón al nacer, la UNIDAD DE OBSERVACION es 1 lechón. En cambio, si la variable es peso de un grupo de 5 escarabajos criados en ambientes secos, la UNIDAD DE OBSERVACION es 1 grupo de 5 escarabajos.

Clasificación de las variables.

NO NUMERICAS O CUALITATIVAS: cuando se registran cualidades o atributos. Es aquella para la cual no se hacen mediciones numéricas.

Estas variables pueden pertenecer a una de las dos siguientes escalas de medición:

NOMINALES: entre las diferentes modalidades que adopta la variable no es posible establecer un ordenamiento. Ejemplos:

• observamos si el paciente está sano o enfermo.

• observamos el color de ojos en las personas, los resultados que podemos obtener son azules, grises, verdes, marrones, negros u otros.

ORDINALES: entre las diferentes modalidades que adopta la variable se establece un orden natural. Ejemplos:

• Observamos el resultado de la aplicación de un tratamiento médico a pacientes enfermos. El cual podemos expresarlo como: mejorado, igual y empeorado.
• Si observamos el nivel educativo de personas que asisten a una obra de teatro: primario, secundario, terciario y universitario.

NUMERICAS O CUANTITATIVAS: cuando se registran cantidades o magnitudes. Se subdividen en:

DISCRETAS: toma sólo algunos valores finitos o infinitos numerables. Es frecuente que se utilice para procesos de conteo, de donde suele surgir la idea de que toma valores enteros, pero podría también tomar valores decimales. Ejemplos:

a) cantidad de alumnos que asisten a clase.
b) cantidad de dinero reunido con monedas de $ 0,25.

CONTINUAS: toma cualquiera de los infinitos valores dentro de un intervalo de definición. Sus valores se obtienen generalmente por mediciones. Ejemplos:

a) temperatura del agua consumida por una vaca,

b) altura de un alumno de 5to año del Raggio.

Unidades de medida: Son las unidades en las que se expresan los valores de la variable, aunque no siempre estos van acompañados de unidades.

Ejemplo: peso, en Kg; temperatura, en °C.

EJEMPLOS
En los siguientes ejemplos identifique:

1. POBLACIÓN DE ESTUDIO.

2. VARIABLE EN ESTUDIO.

3. CLASIFICACION DE LA VARIABLE.

4. MUESTRA DE INDIVIDUOS.

5. UNIDAD DE OBSERVACION O UNIDAD EXPERIMENTAL.

a) Un investigador médico examina los efectos de un agente cancerígeno en las ratas de un bioterio. Para ello elige 20 ratas y 3 semanas después de inyectado el agente cancerígeno, realiza una intervención quirúrgica en las ratas para extraer el tumor, ya que necesita conocer el peso del mismo para su investigación.

b) Un nuevo tratamiento biológico para controlar el gusano de la manzana es probado en 10 huertos comerciales localizados en la provincia de Río Negro. Para ello se hace el tratamiento en el tiempo correspondiente, se suspende el mismo, y luego de 1 mes se evalúa su efectividad contando la cantidad de manzanos que presentan infestación por el gusano de la manzana.

PRESENTACION DE DATOS

Una vez obtenida una muestra al azar de una población específica, se recurre a una manera de ordenarla y organizarla, para facilitar su comprensión e interpretación.

El **OBJETIVO** es disponer los datos en forma tal que su utilización sea práctica y sencilla, que permita obtener conclusiones, directamente o por cálculos posteriores.

TABLA DE FRECUENCIAS

- para variables discretas: arreglo sistemático de valores agrupados. Se usan para presentar los datos de modo tal que a cada valor de variable se le asigna su frecuencia, es decir el número de veces que se ha registrado dicho valor en la muestra de observaciones.
- para variables continuas: arreglo sistemático de valores agrupados en intervalos, designados intervalos de clase.

- **xi:** representa los distintos valores que toma la variable en la muestra o población, o sea son los valores observados de la variable.

Intervalos de clase [xinf; xsup): es un intervalo semicerrado. Se utiliza para agrupar los datos cuando el número de valores que adopta la variable es grande.

Los intervalos se definen generalmente de igual longitud y cada valor de variable pertenece a un único intervalo. Los intervalos deben cubrir el rango de valores de la variable.

- **x'i:** representa el valor medio del intervalo de clase, en el caso de variables CONTINUAS, y los valores diferentes de la variable, en el caso de variables DISCRETAS.
- **fi:** es la frecuencia absoluta simple, representa el número de veces que se ha registrado el valor xi en las variables cualitativas o cuantitativas discretas, y el número de valores de la muestra que pertenecen al intervalo de clase i-ésimo en las variables continuas.
- **n**: Tamaño de la muestra, cantidad de datos u observaciones.
- **Fi:** frecuencia absoluta acumulada hasta xi o hasta el intervalo de clase i-ésimo.
- **hi:** es la frecuencia relativa simple, que se obtiene como cociente entre la frecuencia absoluta simple fi y el tamaño de la muestra. Puede expresarse como números fraccionarios o números decimales.

En el caso de VARIABLES CUALITATIVAS, esta medida se conoce como proporción o proporción muestral.

- **Hi**: es la frecuencia relativa acumulada hasta xi o hasta el intervalo i-ésimo.

GRÁFICOS

En las ABSCISAS se representan los distintos valores de la variable. En las ORDENADAS se representan las frecuencias absolutas y/o las relativas o sus correspondientes porcentajes.

- **DE BARRAS**: para representar datos CUALITATIVOS y sus frecuencias. Se debe separar las barras para enfatizar las distinciones entre las distintas categorías. Pueden ser barras verticales o barras horizontales.
- **DE BASTONES Y ESCALONES:** para variables CUANTITATIVAS DISCRETAS.
- **HISTOGRAMA:** para variables CUANTITATIVAS CONTINUAS.
- **POLIGONO DE FRECUENCIAS ACUMULADAS u OJIVA:** para variables CUANTITATIVAS CONTINUAS. Se representan las frecuencias acumuladas.

MEDIDAS RESUMEN

Sintetizan con un valor características de la distribución de la variable en el conjunto de datos observados.

MEDIDAS DE CENTRALIDAD

Media aritmética: es lo que frecuentemente se llama promedio de los datos obtenidos de la muestra. Se representa con $\bar{X}$. En su cálculo intervienen todos los valores observados de la variable. Tiene las mismas unidades de medida que la variable original.

Mediana: es un valor dentro del rango de la variable tal que el 50% de las observaciones es inferior o igual a este valor y el 50% de las observaciones es superior o igual al mismo. Se designa con Me, y tiene las mismas unidades de medida que la variable original. Observación: así definida la mediana podría no ser única, sin embargo, existe una convención para determinar el valor. La Mediana depende de la posición que ocupan los datos en la ordenación y no del valor numérico de los mismos.

Modo: es el valor observado de mayor frecuencia. Un mismo grupo de datos puede tener más de un Modo. Se representa con Mo y tiene las mismas unidades de medida que la variable original.

MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Miden el grado de concentración de los datos respecto de alguna medida resumen de centralidad.

Rango o Amplitud: Se representa con R o A. Se expresa en unidades de la variable. Es la diferencia entre el máximo valor observado y el mínimo observado.
Varianza muestral: Se denota con S^2. Se expresa en unidades de la variable al cuadrado.

Desvío estándar muestral: es la raíz cuadrada positiva de la varianza muestral. Se representa con S. Se expresa en la misma unidad que la variable.

Coeficiente de Variación (CV): es el cociente entre el desvío estándar muestral y la media aritmética. Se suele expresar en porcentaje, dado que es una medida de dispersión relativa, mientras que las anteriores son medidas de dispersión absolutas.

EJEMPLO:

1) En un estudio sobre la detección de *pseudotuberculosis*, la Dirección de Bromatología seleccionó al azar *28 establecimientos*, dedicados a la cría y engorde de ovinos, registrando la *cantidad de animales afectados*, *por establecimiento*, al realizar la faena en el frigorífico:

70 110 135 110 77 82 118 110 82 77 77 82 110 110
75 82 75 82 70 75 118 75 120 77 77 82 82 70

a) Identificar la variable y clasificar la variable.
b) Construir la tabla de frecuencias.
c) Calcular las medidas de posición y dispersión.

SOLUCIÓN:
a) La variable es aquella característica que nos interesa medir, en este caso:
X: "cantidad de ovinos atacados de pseudo tuberculosis en un establecimiento dedicado a la cría y engorde de ovinos al realizar la faena en el frigorífico".
V. Cuantitativa Discreta.

En este problema la **población en estudio** corresponde a los establecimientos dedicados a la cría y engorde de ovinos; como no se especifica la región en donde están ubicados, solamente con esta descripción nos alcanza. Entonces, la muestra tomada es de:
n (tamaño de la muestra): 28 establecimientos dedicados a la cría y engorde de ovinos.

b) <u>Tabla de frecuencias:</u> la *primera* columna contiene los valores de la variable que se registraron en la muestra, y se simboliza con $\boldsymbol{x_i}$; en la *segunda* columna se registra cuántas veces se observa cada uno de los valores de la variable (x_i), y corresponde a la frecuencia absoluta simple ($\boldsymbol{f_i}$). En la *tercera* columna se registra cuántas veces se observan los valores de la variable menores o iguales a x_i, o sea, las frecuencias absolutas acumuladas ($\boldsymbol{F_i}$). La cuarta columna corresponde al cociente entre $\boldsymbol{f_i}$y $\boldsymbol{n}$, o sea la frecuencia relativa simple ($\boldsymbol{h_i}$). En la última columna, correspondiente a las frecuencias relativas acumuladas ($\boldsymbol{H_i}$), sumamos las frecuencias relativas simples de la misma manera que en la tercera columna, hasta acumular el total de la muestra. Por las características de las frecuencias relativas siempre obtendremos como valor 1, o 100%, o cercanos a ellos, según se expresen en decimales o como porcentajes.

x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
70	3	3	0,11	0,11
75	4	7	0,14	0,25
77	5	12	0,18	0,43
82	*7*	*19*	*0,25*	*0,68*
110	5	24	0,18	0,86
118	2	26	0,07	0,93
120	1	27	0,04	0,96
135	1	**28**	0,04	**1,00**
TOTAL	**28**		**1,00**	

La utilidad de la tabla es que el ordenamiento de los datos permite interpretar la información de la muestra. Por ejemplo, tomemos la información de la cuarta fila de datos, en donde $x_4 = 82$:

- $f_4 = 7$, indica que en 7 establecimientos dedicados a la cría y engorde de ovinos se encontraron 82 ovinos atacados de pseudo tuberculosis.
- $F_4 = 19$, se interpreta como que en 19 establecimientos dedicados a la cría y engorde de ovinos se encontraron a lo sumo 82 ovinos atacados de pseudo tuberculosis (o hasta 82 ovinos atacados de pseudo tuberculosis inclusive).

NOTA: $F_4 = \sum_1^4 f_i = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 3+4+5+7 = 19$

- h_4 = 0,25, expresa que en el 25% de los establecimientos dedicados a la cría y engorde de ovinos se encontraron 82 ovinos atacados de pseudo tuberculosis.
- H_4 = 0,68, indica que en el 68% de los establecimientos dedicados a la cría y engorde de ovinos se encontraron a lo sumo 82 ovinos atacados de pseudo tuberculosis (o hasta 82 ovinos atacados de pseudo tuberculosis inclusive).

NOTA: $H_4 = \sum_1^4 h_i = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = 0{,}11 + 0{,}14 + 0{,}18 + 0{,}25 = 0{,}68$

c) Medidas de posición

- **MEDIA ARITMÉTICA**

Para calcular la media aritmética debemos sacar el promedio de todos los valores de la variable que hemos obtenido en la muestra. En la fórmula observamos que aparece la expresión $\Sigma x_i f_i$, o sea, la sumatoria de los productos entre cada valor de la variable y su correspondiente frecuencia absoluta simple. Para facilitar los cálculos podemos agregar una columna a la tabla de frecuencias en donde realizaremos estos productos, de la siguiente forma:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i f_i}{n} = \frac{2510}{28} = 89{,}64$$

Interpretación: aproximadamente 90 ovinos atacados

- **MEDIANA**

Para calcular la mediana, primero debemos ordenar los datos de menor a mayor o de mayor a menor. En este ejercicio ya ordenamos los datos al construir la tabla de frecuencias. Como sabemos, esta medida divide a la muestra en dos partes iguales, por lo que en el primer paso debemos encontrar la posición de la misma, o sea, encontrar cuál es el valor central de la muestra (en caso de que ***n*** sea un número impar), o cuáles son los valores centrales (en caso de que ***n*** sea un número par).

$$\text{Pos Me} = \frac{n+1}{2} = \frac{29}{2} = 14{,}5$$

Entonces los valores centrales ocupan los lugares 14 y 15.
Como los valores centrales son $x_{(14)}$=82 y $x_{(15)}$=82, debemos realizar el promedio entre ellos:

$$Me_x = \frac{x_{(14)} + x_{(15)}}{2} = \frac{82+82}{2} = 82 \text{ ovinos atacados de pseudotuberculos}$$

La interpretación es 82 ovinos atacados de pseudotuberculosis.

- **MODO**

Para calcular el modo tenemos que recurrir nuevamente a la tabla de frecuencias, porque en ella vamos a ubicar rápidamente cuál es el valor de la variable que se repite con mayor frecuencia. Debemos observar cualquiera de las columnas de frecuencias simples, en este caso tomamos la columna de f_i. La mayor frecuencia es f_4, por lo tanto:

$f_4 = 7 \Rightarrow$ Mo = **82 ovinos atacados de pseudotuberculosis**

Observar que también estas medidas verifican la condición de asimetría positiva:

$$\text{Me} = \text{Mo} = 82 \text{ ovinos atacados de pseudotuberculosis} < \bar{X} = 89{,}64 \text{ ovinos atacados de pseudotuberculosis}$$

Medidas de dispersión

- **RANGO o AMPLITUD**

Esta medida de dispersión es la más sencilla y consiste en conocer cuántas unidades comprende la totalidad de los valores observados en la muestra. Para calcularlo sólo basta con realizar la resta entre el $x_{máx}$ (mayor valor de la variable) y $x_{mín}$ (menor valor de la variable).

$$Amplitud = x_{Máx} - x_{mín} = 135 - 70 = 65 \text{ ovinos atacados de pseudotuberculosis}$$

- **VARIANZA**

En la fórmula observamos que aparece la expresión $\sum x_i f_i$, que ya habíamos usado al calcular la media aritmética, y aparece una expresión, $\sum x_i^2 f_i$, la sumatoria de los productos entre el cuadrado de cada valor de la variable y su correspondiente frecuencia absoluta simple. Para facilitar los cálculos podemos agregar una columna a la tabla de frecuencias en donde realizaremos estos productos, de la siguiente forma:

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\left[\Sigma x_i^2 f_i - \frac{(\Sigma x_i f_i)^2}{n}\right] = \boxed{s_x^2 = 366{,}02 \text{ (ovinos atacados de pseudotuberculosis)}^2}$$

Debemos recordar que se expresa en la unidad de la variable pero elevada al cuadrado.

- **DESVÍO ESTÁNDAR**

El desvío estándar es la raíz cuadrada de la varianza. Por lo que lo calculamos de la siguiente forma:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{366.02} = 19.13 \cong 19 \text{ animales atacados de pseudotuberculosis}$$

Interpretación: aproximadamente 19 ovinos atacados de pseudotuberculosis

- **COEFICIENTE DE VARIACIÓN**

Es una medida de dispersión relativa en donde se relaciona una medida de dispersión (s_x) con una medida de posición ($\bar{x}$), y su resultado se expresa en porcentaje. No tiene unidades de medida.

$$\boxed{C.V._x\% = \frac{s_x}{\bar{x}}.100 = \frac{19{,}13}{89{,}64}.100 = 21{,}34 \quad es \quad decir \quad 21{,}34\%}$$

2) Los siguientes valores corresponden a la *altura*, en mm, del complejo QRS de 20 electrocardiogramas de galgos de ambos sexos, luego de una competencia:

25,0	29,3	20,0	24,1	22,5	20,5	25,0	24,0	21,0	23,7
17,0	20,5	30,0	20,6	23,2	30,8	27,5	30,3	25,5	33,8

a) ¿Cuál es la variable en estudio y de qué tipo es?

b) Realizar los gráficos correspondientes a los datos ordenados en una tabla de frecuencias.

c) Calcular las medidas de posición y de dispersión, indicando las unidades que corresponden a cada caso.

SOLUCIÓN

a) X: altura del complejo QRS en electrocardiogramas de un galgo luego de una competencia, medida en mm.

n = 20 (tamaño de muestra)

La población en estudio puede definirse como:

- ✓ el conjunto de todos los galgos, luego de una competencia → Población Biológica
- ✓ el conjunto de todos los valores de altura del complejo QRS en electrocardiogramas de galgos, después de una competencia → Población Estadística.

La unidad de observación es un galgo.

La clasificación de la variable de interés es cuantitativa continua.

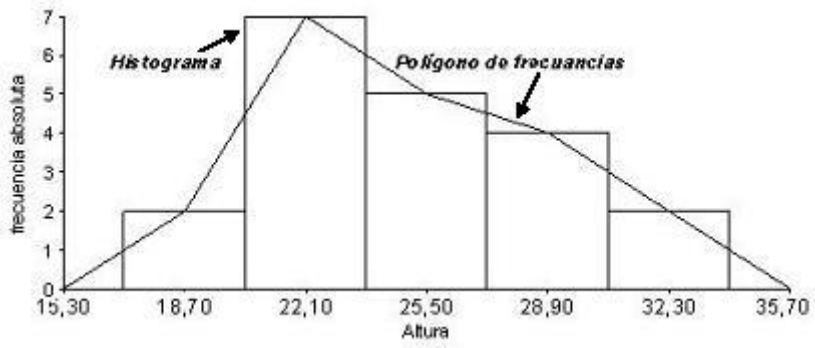
La unidad de medida utilizada en esta variable es mm.

b) Tabla de frecuencias:

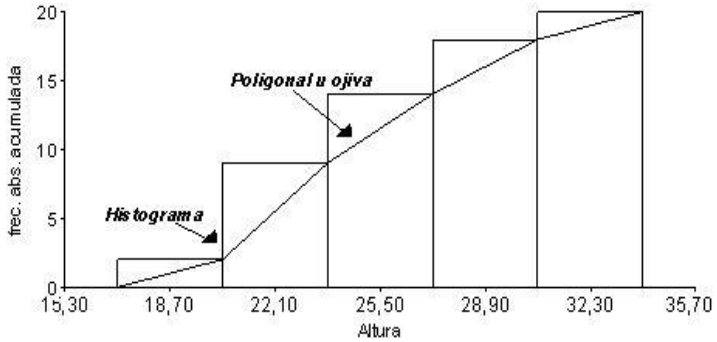
[;)	x'_i	f_i	F_i	h_i	H_i
17,0 - 20,4	18,7	2	2	0,10	0,10
20,4 - 23,8	22,1	7	9	0,35	0,45
23,8 - 27,2	25,5	5	14	0,25	0,70
27,2 - 30,6	*28,9*	*4*	*18*	*0,20*	*0,90*
30,6 - 34,0	32,3	2	20	0,10	1,00
TOTAL		20		1,00	

donde: x'_i = marca de clase (punto medio del intervalo)
f_i= frecuencia absoluta simple
F_i = frecuencia absoluta acumulada
h_i = frecuencia relativa simple
H_i = frecuencia relativa acumulada

Ejercitemos la interpretación de los datos que aparecen en la tabla. Tomemos por ejemplo la información del intervalo de clase que aparece en la cuarta fila: [27,2 – 30,6). ¿Cómo interpretamos "[27,2 – 30,6)"? El intervalo es cerrado en 27,2 y abierto en 30,6, por lo que la altura de complejo QRS de los electrocardiogramas realizados luego de la competencia de los galgos de la muestra, está comprendida entre 27,2 mm (inclusive) y 30,6 mm (sin incluir).
Como F_4 = 18, podemos decir que 18 electrocardiogramas de galgos, luego de una competencia, tienen una altura de complejo QRS menor a 30,6 mm.
Como h_4 = 0,20, decimos que el 20% de los electrocardiogramas de los galgos muestreados, luego de una competencia, tiene una altura de complejo QRS comprendida entre 27,2 mm (inclusive) y 30,6 mm (sin incluir).
f_4 = 4, indica que se encontraron 4 galgos, cuyos electrocardiogramas realizados luego de una competencia muestran una altura del complejo QRS comprendida entre 27,2 mm (inclusive) y 30,6 mm (sin incluir).
H_4 = 0,90, indica que el 90% de los galgos muestreados, luego de la competencia, muestran una altura en el complejo QRS de hasta 30,6 mm.



Los dos gráficos representan las frecuencias simples (absolutas y relativas), se denominan **HISTOGRAMAS** y también tienen representado un polígono, llamado **POLÍGONO DE FRECUENCIAS**, que pasa por los puntos cuyas abscisas son los puntos medios de los intervalos de clase, o las marcas de clase, y cuyas ordenadas son las frecuencias correspondientes a dicho intervalo. Se cierra el polígono uniendo con las marcas de clase de dos intervalos ficticios, uno anterior al 1er. intervalo, y otro posterior al último intervalo. Ambos gráficos representan la densidad de los valores observados de la variable en esta muestra, ya que la superficie encerrada dentro del histograma es equivalente a la superficie delimitada por el polígono de frecuencias.
La distribución de la variable en esta muestra presenta una leve asimetría positiva (cola a derecha).



En este caso, se representan las frecuencias acumuladas, absolutas y relativas. Se denomina HISTOGRAMA (pero para frecuencias acumuladas), y se representa una poligonal, llamada OJIVA, que marca la acumulación a lo largo del intervalo, uniendo la frecuencia acumulada obtenida en el límite inferior de cada intervalo con la obtenida en el límite superior del mismo.

<u>Medidas de centralidad</u>:
(NOTA Observar que se trata de variables continuas, agrupadas en intervalos, por lo tanto: la media y la varianza se calculan utilizando las marcas de clase.)

- **MEDIA ARITMETICA**

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum x'_i f_i}{n} = \frac{499{,}8}{20} = 24{,}99\ mm}$$

- **MEDIANA**

$$Pos\ \text{Me} = \frac{\text{n+ 1}}{2} = \frac{21}{2} = 10{,}5 \Rightarrow \text{ Int Me [23,8 ; 27,2)}$$

$$Me_x = L_i + c\left(\frac{\frac{(n+1)}{2} - F_{i-1}}{f_i}\right)$$

Donde: c : amplitud del intervalo
L_i: límite inferior del intervalo mediana
f_i: frecuencia absoluta simple del intervalo mediana
F_{i-1}: frecuencia absoluta acumulada del intervalo anterior

$$Me_x = 23{,}8 + 3{,}4\left(\frac{10{,}5\text{-}9}{5}\right) = 23{,}8 + 3{,}4\left(\frac{1{,}5}{5}\right) = 23{,}8 + 3{,}4.0{,}3 = 23{,}8 + 1{,}02 = 24{,}82\ mm$$

Es importante diferenciar POSICIÓN DE MEDIANA y cálculo de la MEDIANA en sí. La primera sólo nos aporta la ubicación del Intervalo Mediana, es un valor en el rango de las frecuencias absolutas acumuladas, y la segunda es el valor numérico de la Mediana, es un valor en el rango de la variable.

- **MODO**

Int. Mo ----> [20,4 ; 23,8)

$$Mo = L_i + c\left[\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right]$$

Donde
$\Delta_1 = f_{(Max)} - f_{(ant)}$
$\Delta_2 = f_{(Max)} - f_{(post)}$
L_i: Límite inferior del intervalo Modal.
c: Amplitud del intervalo Modal.
$f_{(post)}$: Frecuencia absoluta del intervalo posterior al intervalo Modal.
$f_{(ant)}$: Frecuencia absoluta del intervalo anterior al intervalo Modal.
$f_{(Max)}$: Frecuencia absoluta del intervalo Modal.

$$Mo = 20{,}4 + 3{,}4\left(\frac{5}{5+3}\right) = 20{,}4 + 3{,}4.\frac{5}{8} = 20{,}4 + 2{,}125 = 22{,}525\ mm$$

Volvamos a analizar la distribución de la variable en esta muestra utilizando las medidas de posición: Me= 24,82 mm, Mo = 22,8295 mm, $\overline{x}$ = 24,99 mm. Al ser Mo < Me < $\overline{x}$, podemos decir que la distribución tiene ASIMETRÍA POSITIVA.

<u>Medidas de dispersión</u>:

- **VARIANZA**

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\left[\Sigma x'^2_i\ f_i - \frac{(\Sigma x'_i\ f_i)^2}{n}\right] = \frac{1}{19}\left[12796{,}92 - \frac{(499{,}8)^2}{20}\right] = \frac{1}{19}\cdot 306{,}918 =$$
$$= 16{,}15 mm^2$$

- **DESVÍO ESTÁNDAR**

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{16{,}15} mm = 4{,}018 mm$$

- **COEFICIENTE DE VARIACIÓN**

$$\boxed{C.V. = \frac{S}{\overline{X}}.100 = \frac{4{,}018}{24{,}99}.100 = 16{,}08\%}$$

<u>PROBLEMAS PROPUESTOS</u>

1) Clasificar las siguientes variables en CUALITATIVAS (NOMINALES u ORDINALES) o CUANTITATIVAS (DISCRETAS o CONTINUAS):

a) Peso, en g, de pelo esquilado a un conejo de Angora.

b) Cantidad de lámparas de 40 W fabricadas en un día de trabajo.

c) Tiempo de incubación del sarampión en una persona, en días.

d) Color de ojos de un niño de 10 años nacido en la Provincia de Córdoba.

e) Color de pelaje en un equino.

f) Número de cachorros nacidos por camada.

g) Número de llamados telefónicos que recibe una central telefónica por mes.

h) Color de una rosa.

i) Cantidad de tornillos producidos en ocho horas de trabajo.

j) Volumen de nafta despachada por una compañía petrolera en una semana.

k) Nivel educacional alcanzado por un individuo.

l) Número de errores cometidos por un estudiante en un examen de elección múltiple.

m) Distancia recorrida por un neumático de un vehículo, hasta el primer pinchazo.

n) Nacionalidad de un individuo.

o) Número de niños nacidos en un hospital el primer día del año.

2) En la siguiente tabla, se han borrado algunos de los resultados obtenidos al lanzar un dado 30 veces.

x	1	2	3	4	5	6
f	7	5	6	7		

a) ¿Cuáles son las frecuencias faltantes si la media aritmética es 3?

b) Determinar la mediana, la moda y el desvío estándar.

c) Confeccionar la tabla de frecuencias relativas y acumuladas.

d) Realizar un gráfico de barras.

3) Los siguientes datos corresponden a la medición en sangre de GPT (glutámico pirúvico transaminasa, enzima que demuestra toxicidad hepática) en felinos sometidos a una dosis tóxica mínima de un nuevo antiparasitario externo:

[;)	16,3-21,5	21,5-26,7	26,7-31,9	31,9-37,1	37,1-42,3
f_i	1	5	5	9	5

Utilizando la información dada en la tabla:

a) Interpretar H_2 , F_4 , y h_3.

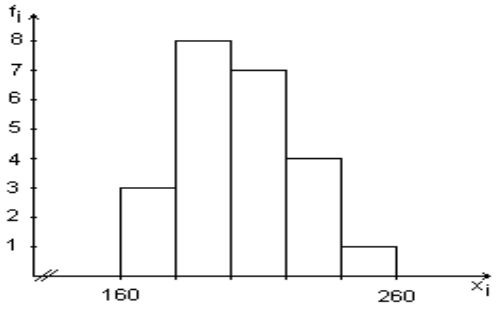
b) ¿Cuál es la unidad de observación?

c) Representar gráficamente.

d) Calcular media aritmética, modo y mediana.

e) Calcular varianza, desvío estándar y C.V.

4) Luego de aplicar a un grupo de animales un tratamiento con insulina se midió la glucemia (en mg %) obteniéndose:



a) Indicar cuál es la variable.

b) ¿Cuál es la unidad de observación?

c) ¿Cuál es el tamaño de la muestra?

d) Calcular la media aritmética, la desviación estándar

5) Los siguientes datos corresponden a los diámetros cardíacos, en mm, medidos en radiografías de tórax de 100 adultos normales:

a) Definir la variable y clasificarla.

b) La población en estudio es .....

c) La unidad de observación es .....

d) Completar la tabla de distribución de frecuencias y realizar los gráficos correspondientes a las f_i y H_i.

e) Interpretar f_2 , F_5 , h_4 y H_6

f) Calcular la media y la varianza.

g) Determinar los intervalos mediana y modal, y calcular las medidas correspondientes a cada uno.

Intervalos	frecuencias
80,5 - 90,5	8
90,5 - 100,5	15
100,5 - 110,5	21
110,5 - 120,5	23
120,5 - 130,5	16
130,5 - 140,5	9
140,5 - 150,5	8

6) Las notas obtenidas por los 50 alumnos de un curso en un examen son las siguientes:

7- 6- 2- 8- 8- 3- 6 1- 7- 10- 9- 4- 4- 6- 3- 7- 3- 2- 8- 4- 7- 8- 6- 8- 3- 3- 9- 2- 1- 3- 8- 7- 4- 10- 10- 8- 4- 8- 4- 8- 8- 4- 9- 1- 2- 2- 3- 6- 5- 9

a) Confeccionar la tabla de distribución de frecuencias: f, F, r y R.

b) Si los alumnos que obtuvieron menos de 6 puntos deben rendir examen en marzo, ¿Cuántos alumnos tienen que rendir dicho examen?

c) ¿Qué cantidad de alumnos tuvo una nota de por lo menos 8 puntos?

d) Determinar la media aritmética.

e) Calcular la moda. ¿Qué representa este valor?

f) Realizar un gráfico de bastones.

7) Una consultora les pregunto a 50 familias elegidas al azar cuántos hijos tenían. Los datos recopilados fueron los siguientes:

1, 6, 4, 2, 6, 3, 3, 5, 8, 1, 0, 4, 2, 2, 1, 3, 7, 8, 3, 1, 9, 1, 2, 3, 6, 3, 2, 2, 0, 5, 3, 1, 0, 1, 4, 4, 1, 3, 2, 1, 1, 4, 3, 3, 2, 4, 3, 7, 2, 2.

a) Organice los datos anteriores en una tabla de distribución de frecuencias.
b) Encuentre la frecuencia relativa (expresar en decimal) y la frecuencia acumulada absolutas de cada uno de ellos.
c) Determine la media aritmética.
d) Halle la moda ¿Qué representa ese valor en el contexto de la situación?
e) Si se considera familia numerosa a aquellas que tengan por lo menos tres hijos. Indicar cuantas de las familias entrevistadas son numerosas.

8) El entrenador de “Los Guachines” quiere estudiar cómo fue el rendimiento del equipo durante el torneo pasado y, para ello, organizó los goles que este convirtió, por partido, en una tabla como ésta:

Goles	f	F	h
0	5		
1	8		
2	4		
3	3		
4	5		

a) Encontrar la frecuencia relativa y la frecuencia acumulada absolutas de cada uno de ellos.

b) ¿Cuántos partidos jugó en total?

c) Determinar la media aritmética.

d) Calcular la moda de los goles convertidos. ¿Qué representa este valor?

e) Calcular la varianza y el desvío estándar.

f) Realizar un gráfico de barras para la distribución de frecuencias absolutas simples.

9) Se realizó un experimento con lechones híbridos, criados en sistema extensivo, al aire libre en piso de tierra, en la provincia de Buenos Aires, para analizar la ganancia diaria de peso, en gramos. El objetivo final de este experimento es poder comparar esta variable con la correspondiente a lechones criados en sistema intensivo, en piso de concreto. De los primeros se obtuvieron los siguientes resultados:

x_i	[0;50)	[50;100)	[100;150)	[150;200)	[200;250]
F_i	1	4	9	15	16

a) Definir y clasificar la variable de interés.

b) Interpretar h_3 y F_4

c) Calcular el modo, la mediana y la media.

10) Corrija, en caso de ser necesario, las negritas de las siguientes afirmaciones de modo tal que siempre resulten verdaderos:

i La **media aritmética** se obtiene ordenando los datos y no es influenciada por valores extremos.

ii La **varianza** es una medida de variación relativa porque permite comparar la dispersión de muestras de distintas variables.

iii La media aritmética de una variable puede ser **negativa**.

iv Las unidades de **la varianza** coinciden con las de la variable en estudio.

v Las unidades del **coeficiente de variación** son las mismas para cualquier.

11) En una fábrica de lámparas UV se realiza el control de las partidas antes de que salgan a la venta. Uno de los controles corresponde a la duración, medida en horas. Un día en particular llegan al laboratorio 25 de ellas, obteniéndose los siguientes resultados:

Duración (hs)	f_i	h_i
170 - 180		3/25
180 - 190		4/25
190 - 200		8/25
200 - 210		6/25
210 - 220		4/25

a) Definir la variable y clasificarla.

b) La unidad de observación es .....

c) Completar la distribución de frecuencias y graficar h_i y F_i.

d) El "8" de la columna de f_i significa que se observaron:

i. 8 lámparas de luz UV con una duración de hasta 200 horas.

ii. Hasta 8 lámparas de luz UV con una duración entre 190 hasta 200 horas.

iii. 8 lámparas de luz UV con una duración entre 190 hasta 200 horas.

e) Calcular la media, la varianza y el C.V.

f) Determinar los intervalos mediana y modal.

12) Los siguientes datos corresponden al dosaje de urea, en mg%, obtenidos en 25 perros sometidos a pruebas renales en el período operatorio.

[;)	16,5 – 21,9	21,9 – 27,3	27,3 – 32,7	32,7 – 38,1	38,1 – 43,5
F_i	2	6	12	21	25

a) Definir la variable en estudio y clasificarla.

b) La unidad de observación es .....

c) Completar la tabla de frecuencias.

d) Realizar los gráficos correspondientes.

e) Calcular medidas de posición.

f) Calcular medidas de dispersión.

13) Se detallan a continuación los pesos de 30 pollos, luego de la aplicación de una nueva formulación de una dieta comercial, elegidos al azar, expresados en Kg.

[;)	1,3 – 1,9	1,9 – 2,5	2,5 – 3,1	3,1 – 3,7	3,7 – 4,3
h_i	3/30	8/30	6/30	6/30	7/30

a) Completar la tabla de frecuencias.

b) Realizar los gráficos de frecuencias absolutas.

c) Calcular la media, la mediana y el modo.

d) Calcular el coeficiente de variación.

Variable aleatoria

Se llama variable aleatoria a una función cuyo dominio es el espacio muestral S y cuyo codominio es el conjunto de números reales; es decir que asigna valores numéricos a cada uno de los puntos muestrales.
Las variables aleatorias, se clasifican en dos grandes grupos:

Variable aleatoria discreta: Una variable aleatoria discreta es aquella cuyo recorrido tiene un número finito o infinito numerable de valores.
Ejemplos:
1.- Se cuenta la cantidad de materias que tienen bajas en el primer trimestre un alumno de 5to año.
2.- Se registran las edades, en años, de los alumnos de 5to año de la escuela Raggio.
• **Distribución de probabilidad:** La distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta es el conjunto de pares (x_i, $p(x_i)$). Puede estar dada por una tabla, una gráfica, una fórmula u otro sistema utilizado para especificar todos los valores posibles de una variable aleatoria discreta junto con sus probabilidades respectivas.
• **Función de probabilidad puntual $p(x_i)$:** Si X es una variable aleatoria que toma valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se dirá que $p(x_i)$ es su función de probabilidad si y sólo si verificalas siguientes dos condiciones:
a) $p(x_i) \geq 0$ para todos los valores de x_i del recorrido de la variable aleatoria
b) $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$
• **Función de distribución acumulada F(x):** La función de distribución acumulada F(x) de la variable aleatoria X se define como la probabilidad de que X sea menor o igual que algún valor x, siendo x un valor cualquiera del conjunto de números reales. O sea $F(x)=P(X \leq x)$.

Nota: En la bibliografía se encuentran dos maneras de acumular la probabilidad, a derecha y a izquierda. La función de distribución de probabilidades definida es una función de probabilidades acumuladas aizquierda. En lo sucesivo cuando digamos función de distribución, estamos refiriéndonos a esta.
Variable aleatoria continua: Una variable aleatoria se dice continua, si el conjunto de valores posibles de la misma es un intervalo; es decir que x puede tomar cualquier valor dentro del intervalo. En particular este intervalo puede ser de la forma (a, ∞), o $(-\infty, b)$ o $(-\infty, \infty)$.
Ejemplos:
1.- Se mide la profundidad de un lago en diferentes puntos elegidos al azar.
2.- Se elige un número real al azar entre el 0 y el 1.
3.- Se mide la altura de un individuo seleccionado al azar de cierta población.
• **Distribución de probabilidad:** Si conocemos el recorrido de una variable aleatoria continua y su correspondiente función de probabilidad o función de densidad, diremos que conocemos la distribución en probabilidad.
• **Función de densidad $f(x_i)$:**La función de probabilidad correspondiente a una variable aleatoria continua se llama función de densidad de probabilidad y se simboliza f(xi). La función f(xi) verifica las siguientes condiciones:
a) $f(xi) \geq 0$ para todo xi que pertenece al intervalo $(-\infty, +\infty)$
b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
Para calcular la probabilidad de que una variable aleatoria continua tome valores dentro de un cierto intervalo $A = \{X : a \leq X \leq b\}$, se halla el área encerrada bajo la función de densidad entre los extremos de dicho intervalo; es decir:
$P(A) = \int_a^b f(x)dx =$ para los valores de a<b

• **Función de distribución acumulada $F(x_i)$:** La función de distribución acumulada F(x) de la variable aleatoria X se define como la probabilidad de que X sea menor o igual que algún valor dado x.

Simbólicamente: $F(x_i) = P(X \leq x_i) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$

También se puede calcular la probabilidad de un intervalo utilizando el concepto de función de distribución que muchas veces la encontramos tabulada.

Es decir que:

a) $P(a \leq x \leq b) = F(a) - F(b)$

b) $P(x = a) = \int_{a}^{a} f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$

Estudiaremos una Distribución particular, para este tipo de variables:

Distribución Normal:

La variable aleatoria X tiene distribución normal de parámetros μ y σ^2, cuando sufunción de densidad es:

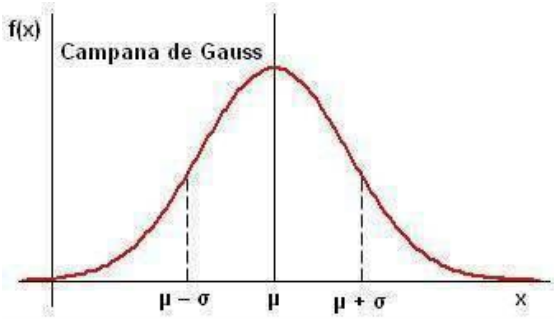
$$f_x(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

Condiciones: $x \in (-\infty; +\infty)$; $\mu \in (-\infty; +\infty)$; $\sigma > 0$

$$E(X) = \mu \; ; \quad V(X) = \sigma^2$$

Notación: X ~ N(μ; σ^2) se lee X tiene distribución normal con parámetros μ y σ^2

Representación gráfica de esta función de densidad



Observaciones:

◆ El gráfico de la función de densidad de la normal tiene forma de campana con eje de simetría la rectax = μ ; y los puntos de inflexión en x = μ - σ y x = μ + σ.

◆ El gráfico de la función de densidad de la normal es asintótica respecto del eje de abscisas.

◆ Los parámetros de la normal indican: μ, la posición, y σ^2 la dispersión.

◆ La distribución normal es importante, no sólo porque hay variables naturales que siguen esta distribución (por ejemplo los errores aleatorios en el proceso de medición de magnitudes), sino porque, bajo ciertas condiciones, suele ser una buena aproximación a la distribución de muchas otras variables.

Distribución normal estándar:

La distribución normal con parámetros μ = 0 y σ^2 = 1 se denomina distribución normal estándar y se denota Z ~ N(0; 1).

Sea la variable aleatoria: $Z = \frac{(X - \mu)}{\sigma}$

Por lo tanto: $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}} \quad para \quad -\infty < Z < +\infty$

La función de distribución de la normal estándar está tabulada.
Uso de tablas:

1.-$P(Z \leq 1{,}25)$=0,89435

2.-$P(Z > 1{,}25) = 1 - P(z \leq 1{,}25) = 1 - 0{,}89435 = 0{,}10565$

3.-$P(0{,}38 \leq x \leq 1{,}25) = P(z \leq 1{,}25) - P(x < 0{,}38) = 0{,}89435 - 0{,}35197 = 0{,}54238$

Ejemplo:

Un tambero está al borde de la quiebra por lo que sus expectativas están puestas en la producción futura. Las vacas Holando Argentino de su tambo tienen un rendimiento normal con media 450 litros y desvío estándar de 80 litros, por mes. El tambero superaría la situación actual si en el próximo mes cada vaca produce más de 510 litros en promedio.

- **a)** ¿Cuál es la probabilidad de que el tambero no llegue a la quiebra?
- **b)** Sabemos además que el tambero pierde todos sus bienes personales si el rendimiento mensual es menor a 320 litros por vaca, ¿cuál es la probabilidad de que quiebre pero sin llegar a exponer su patrimonio personal?
- **c)** Si el tambero produjera en otro país tendría un 30% de probabilidad de no ir a la quiebra, ¿cuántos litros tendría que producir para no quebrar?

SOLUCIÓN: La variable en estudio es una *variable aleatoria continua*, a diferencia de los ejercicios anteriores, es una variable aleatoria con distribución conocida y tabulada. Por la información que nos dan en el enunciado sabemos que es una variable aleatoria con distribución *normal*, con media poblacional 450 litros/mes y varianza poblacional de 6400 litros^2 /mes^2 (ya que su desvío estándar es de 80 litros/mes), por lo tanto podemos decir que:

X: "Rendimiento mensual de leche de una vaca Holando-Argentino en un tambo"

X~N(μ=450 litros/mes ; σ^2=6400 litros^2/mes^2)

Recordemos que sólo contamos con la tabla para la distribución normal estándar por lo tanto tendremos que estandarizar la variable con la siguiente fórmula:

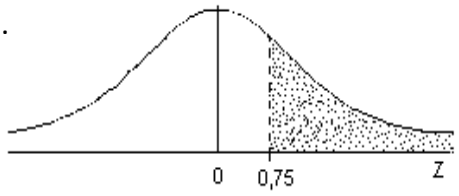
$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 450}{80}$ y sabemos que Z tiene una distribución *normal estándar*, es decir una distribución normal con media poblacional 0 y varianza poblacional 1, simbólicamente: Z~N(0,1)

a) El tambero llega a la quiebra si produce a lo sumo 510 litros/mes por animal, por lo tanto **no** llega a la quiebra si produce más de 510 litros/mes, es decir que nos están preguntando: ¿cuál es la probabilidad de que la variable tome valores mayores que 510?, simbólicamente se escribe: P(X > 510) (tendremos que utilizar la propiedad de que la probabilidad total es uno, ya que todas las tablas dan probabilidades para valores menores que un cierto valor, ya que son tablas de funciones de distribución acumulada).

$$P(X > 510) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{510 - 450}{80}\right) = P(Z > 0,75) = 1 - P(Z \leq 0,75) = 1 - 0,77337 = 0,22663$$

El área sombreada bajo la curva normal es de 0,22663.

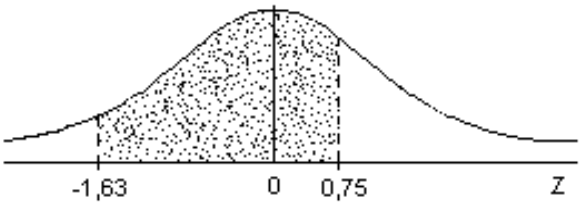
Por lo tanto, **la probabilidad de que el tambero no llegue a la quiebra es de 0,22663.**



Nota: se entra en tabla por los márgenes con el valor estandarizado de la variable, y se busca la probabilidad en el interior de la misma.

b) El tambero llega a la quiebra si produce a lo sumo 510 litros/mes y pierde su patrimonio personal si produce menos de 320 litros/mes, por lo tanto**no** pierde su patrimonio personal si produce más de 320 litros/mes. Es decir que nos están preguntando: ¿cuál es la probabilidad de que la variable tome valores entre 320 y 510? Simbólicamente se escribe: $P(320 \leq X \leq 510)$

$$P(320 \leq X \leq 510) = P\left(\frac{320-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{510-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{320-450}{80} \leq Z \leq \frac{510-450}{80}\right) =$$
$$= P(-1,63 \leq Z \leq 0,75) = P(Z \leq 0,75) - P(Z < -1,63) = P(Z \leq 0,75) - P(Z \leq -1,63) =$$
$$= 0,77337 - 0,05155 = 0,72182$$



El área sombreada bajo la curva normal es de 0,72182

Por lo tanto, **la probabilidad de que el tambero llegue a la quiebra sin perder su patrimonio personal es de 0,72182.**

c) Si el tambero, en otro país, tiene una probabilidad de 0,3 de no irse a la quiebra, debemos buscar el valor de la variable que nos determina esta probabilidad, es decir buscamos el valor de "a" que resuelve: P(X>a)=0,3, pero debemos estandarizar, es decir que buscamos "b" que resuelva: P(Z>b)=0,30.

$$P(Z > b) = 0{,}30 \Rightarrow P(Z \leq b) = 1 - 0{,}3 \Rightarrow P(Z \leq b) = 0{,}7\,.$$

Entrando por el interior de la tabla con el valor de probabilidad 0,7 (o con el valor más cercano a este), buscamos el valor de la variable en los márgenes, obtenemos que b = 0,53. Pero nos interesa este valor sin estandarizar por lo tanto debemos "<u>des-estandarizar</u>". Para esto debemos despejar el valor de X de la fórmula de estandarización:

$$b = Z_{0,7} = \frac{a-\mu}{\sigma} \Rightarrow Z_{0,7} * \sigma = a - \mu \Rightarrow Z_{0,7} * \sigma + \mu = a$$

En nuestro caso $a = 0,52 * 80 + 450 \Rightarrow a = 41,6 + 450 \Rightarrow a = 491,6$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1) Para un grupo de hombres adultos con una edad de 40 a 50 años, la distribución de lecturas de colesterol, en mg/dl, tiene distribución normal con media de 210mg/dl y una desviación estándar de 15mg/dl.

- **a)** Hallar la probabilidad de que un hombre adulto de esta población tenga una lectura de colesterol que exceda los 250mg/dl.
- **b)** Hallar la probabilidad de que un hombre adulto de esta población tenga una lectura de colesterol de a lo sumo 220mg/dl, sabiendo que tiene por lo menos 215mg/dl.
- **c)** Hallar la lectura no superada por el 10% de los adultos de esta población.

2) El peso de los novillos de la raza Hereford es una variable normalmente distribuida con media 380 kg. y desvío estándar 23 kg.

- **a)** Definir la variable de interés e indicar su distribución
- **b)** ¿Cuál es la probabilidad de que un novillo de la raza en cuestión elegido al azar pese entre 400 y 430 kg?
- **c)** ¿Cuál es la probabilidad de que el peso de un novillo de raza Hereford sea mayor a 390 kg?
- **d)** ¿Cuál es el peso no superado por el 25 % de los novillos de dicha raza?

3) Un especialista en ictiología tropical está interesado en calcular cuánto tiempo puede vivir cierto tipo de pez en aguas con determinado porcentaje de toxicidad. Luego de una larga serie de experimentos llega a concluir que la vida media de este tipo de pez alcanza los 90 días, con una desviación estándar de 20 días. En apariencia, la distribución de los días sobrevividos es normal.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un pez viva más de 120 días?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un pez viva entre 90 y 125 días?

4) La edad en meses en que aparece la parvovirosis tiene distribución normal, siendo la media de 5,5, con un desvío estándar de 2 meses. Al recibir en consulta un perro enfermo, ¿cuál es la probabilidad de que tenga:

a) entre 2 y 7,5 meses?

b) más de 4 meses?

c) menos de año?

5) Suponiendo que la altura de los estudiantes de un colegio se distribuye normalmente, con media 1,75m y desvío estándar 0,25m.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno mida más de 1,67m?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno mida entre 1,65 y 1,80m?

6) Los puntos anotados por el equipo ganador en los juegos de fútbol en una localidad estadounidense, tienen una distribución normal con promedio 24 y desvío standard 6.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo ganador anote no menos de 21 y no más de 30 puntos en un juego de fútbol?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que anote por lo menos 15 puntos?

7) Un criadero industrial de conejos obtiene individuos de raza Neocelandés con un peso que se distribuye normalmente con media igual a 2020 g y desvío estándar de 78 g.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el promedio de peso de los animales de una muestra de 20 supere los 2 kg?

b) Si se desea mantener como futuros reproductores a los de peso mayor a 2150 g, ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo supere los 2150 g?

Distribución Normal Estándar

$$P\left(Z < z_{\alpha}\right) = \alpha$$

Z_{α}	**0**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
-0,0	0,50000	0,49601	0,49202	0,48803	0,48405	0,48006	0,47608	0,47210	0,46812	0,46414
-0,1	0,46017	0,45620	0,45224	0,44828	0,44433	0,44038	0,43644	0,43251	0,42858	0,42465
-0,2	0,42074	0,41683	0,41294	0,40905	0,40517	0,40129	0,39743	0,39358	0,38974	0,38591
-0,3	0,38209	0,37828	0,37448	0,37070	0,36693	0,36317	0,35942	0,35569	0,35197	0,34827
-0,4	0,34458	0,34090	0,33724	0,33360	0,32997	0,32636	0,32276	0,31918	0,31561	0,31207
-0,5	0,30854	0,30503	0,30153	0,29806	0,29460	0,29116	0,28774	0,28434	0,28096	0,27760
-0,6	0,27425	0,27093	0,26763	0,26435	0,26109	0,25785	0,25463	0,25143	0,24825	0,24510
-0,7	0,24196	0,23885	0,23576	0,23270	0,22965	0,22663	0,22363	0,22065	0,21770	0,21476
-0,8	0,21186	0,20897	0,20611	0,20327	0,20045	0,19766	0,19489	0,19215	0,18943	0,18673
-0,9	0,18406	0,18141	0,17879	0,17619	0,17361	0,17106	0,16853	0,16602	0,16354	0,16109
-1,0	0,15866	0,15625	0,15386	0,15151	0,14917	0,14686	0,14457	0,14231	0,14007	0,13786
-1,1	0,13567	0,13350	0,13136	0,12924	0,12714	0,12507	0,12302	0,12100	0,11900	0,11702
-1,2	0,11507	0,11314	0,11123	0,10935	0,10749	0,10565	0,10383	0,10204	0,10027	0,09853
-1,3	0,09680	0,09510	0,09342	0,09176	0,09012	0,08851	0,08692	0,08534	0,08379	0,08226
-1,4	0,08076	0,07927	0,07780	0,07636	0,07493	0,07353	0,07215	0,07078	0,06944	0,06811
-1,5	0,06681	0,06552	0,06426	0,06301	0,06178	0,06057	0,05938	0,05821	0,05705	0,05592
-1,6	0,05480	0,05370	0,05262	0,05155	0,05050	0,04947	0,04846	0,04746	0,04648	0,04551
-1,7	0,04457	0,04363	0,04272	0,04182	0,04093	0,04006	0,03920	0,03836	0,03754	0,03673
-1,8	0,03593	0,03515	0,03438	0,03362	0,03288	0,03216	0,03144	0,03074	0,03005	0,02938
-1,9	0,02872	0,02807	0,02743	0,02680	0,02619	0,02559	0,02500	0,02442	0,02385	0,02330
-2,0	0,02275	0,02222	0,02169	0,02118	0,02068	0,02018	0,01970	0,01923	0,01876	0,01831
-2,1	0,01786	0,01743	0,01700	0,01659	0,01618	0,01578	0,01539	0,01500	0,01463	0,01426
-2,2	0,01390	0,01355	0,01321	0,01287	0,01255	0,01222	0,01191	0,01160	0,01130	0,01101
-2,3	0,01072	0,01044	0,01017	0,00990	0,00964	0,00939	0,00914	0,00889	0,00866	0,00842
-2,4	0,00820	0,00798	0,00776	0,00755	0,00734	0,00714	0,00695	0,00676	0,00657	0,00639
-2,5	0,00621	0,00604	0,00587	0,00570	0,00554	0,00539	0,00523	0,00508	0,00494	0,00480
-2,6	0,00466	0,00453	0,00440	0,00427	0,00415	0,00402	0,00391	0,00379	0,00368	0,00357
-2,7	0,00347	0,00336	0,00326	0,00317	0,00307	0,00298	0,00289	0,00280	0,00272	0,00264
-2,8	0,00256	0,00248	0,00240	0,00233	0,00226	0,00219	0,00212	0,00205	0,00199	0,00193
-2,9	0,00187	0,00181	0,00175	0,00169	0,00164	0,00159	0,00154	0,00149	0,00144	0,00139
-3,0	0,00135	0,00131	0,00126	0,00122	0,00118	0,00114	0,00111	0,00107	0,00104	0,00100

Distribución Normal Estándar (continuación)

$$P\left(Z < z_{1-\alpha}\right) = 1-\alpha$$

$Z_{1-\alpha}$	**0**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91308	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900