DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

ESCUELAS TÉCNICAS RAGGIO

MATEMÁTICA 3

CUADERNILLO DE USO OBLIGATORIO

ALUMNO:

CURSO:

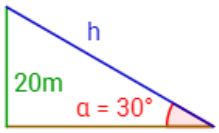
Programa de Matemática de 3° Año

Unidades	Contenidos
Unidad 1 **EXPRESIONES ALGEBRAICAS**	Expresiones algebraicas. Polinomios de una variable. Factorización de polinomios de una variable. Factor común. Diferencia de cuadrados. Formula general para obtener raíces de un trinomio de 2º grado. Teorema de Gauss.
Unidad 2 **FUNCIÓN CUADRÁTICA**	Función cuadrática. Características. Estudio del coeficiente a. Desplazamientos: horizontal y vertical. Propiedad de las raíces. Forma Factorizada. Distintas formas de expresar una función cuadrática. Gráfica y análisis: Dominio, vértice, intersección con los ejes cartesianos, Imagen, eje de Simetría, Max/Min, concavidad. Ecuación polinómica de segundo grado. Sistemas mixtos. Problemas.
Unidad 3 **TRIGONOMETRÍA**	Sistema de medición de ángulos: sexagesimal y radial. Teorema del Seno y del Coseno. Resolución de triángulos oblicuángulos. Circunferencia trigonométrica. Signos en los cuatro cuadrantes. Razones trigonométricas. Relaciones entre las razones trigonométricas de un mismo ángulo. Ecuaciones e identidades. Funciones trigonométricas. Representación gráfica con variación de parámetros.
Unidad 4 **NUMEROS IRRACIONALES. RADICALES. NUMEROS COMPLEJOS.**	**Números irracionales.** Radicales. Propiedades de la radicación y potenciación. Extracción de factores de un radical. Operaciones con radicales. Racionalización de denominadores. Potencia de exponente fraccionario. Cálculos combinados y ecuaciones. **Números complejos**: definición y representación gráfica. Unidad imaginaria. Expresión cartesiana y binómica, trigonométrica y polar. Operaciones y ecuaciones en forma binómica.

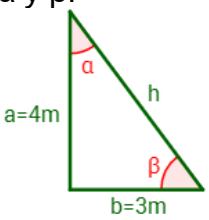
Unidad 5 **FUNCION EXPONENCIAL Y LOGARTIMICA**	Logaritmos: definición, propiedades operatorias. Cambio de base. Uso de la calculadora. Logaritmo decimal y natural. Función logarítmica. Función exponencial. Ecuaciones. Problemas.
Unidad 6 **PROGRESIONES ARITMETICAS Y GEOMETRICAS**	Sucesiones. Identificación de regularidades. Producción de fórmula de progresiones aritméticas y geométricas. Uso de la fórmula para determinar alguno de los elementos de una progresión. Noción intuitiva del límite. Modelización de problemas numéricos.

Guía 0: Trigonometría. Polinomios

1. Se desea sujetar un poste de 20 metros de altura con un cable que parte de la parte superior del mismo hasta el suelo de modo que forme un ángulo de 30º. Calcular el precio del cable si cada metro cuesta 12$.



2. Del siguiente triángulo rectángulo se conocen sus dos catetos: uno mide 4m y el otro mide 3m. Calcular la hipotenusa y los ángulos α y β.



3. De un triángulo rectángulo ABC, se conocen a = 5 m y B = 41.7°. Resolver el triángulo.

4. De un triángulo rectángulo ABC, se conocen b = 3 m y B = 54.6°. Resolver el triángulo.

5. De un triángulo rectángulo ABC, se conocen b = 3 m y c = 5 m. Resolver el triángulo.

6. Dados los polinomios: $P(x) = 4x^2 - 1$; $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$; y $R(x) = 6x^2 + x + 1$

Calcular:

a) $P(x).\ Q(x) =$

b) $P(x) - Q(x) =$

c) $2P(x) - 3R(x) =$

7. Divide por Ruffini y comprueba el resultado con el Teorema del resto:

a) $(x^3 + 2x + 70):(x + 4)$

b) $(x^5 - 32):(x - 2)$

c) $(x^4 - 3x^2 + 2):(x - 3)$

8. Hallar las raíces de los siguientes polinomios y factorizarlos:

a) $P(x) = -x^3 + 4x^2 - x - 6$

b) $Q(x) = -4x^3 + 7x - 3$

9. Factorizar los polinomios:

a) $4x^2 - 4x + 14x^2 - 4x + 1$

b) $x^2 - \frac{49}{121}$

c) $6x^4 - 3x^3 - 24x^2 + 12x$

d) $24x^5 + 18x^4 - 30x^2$

e) $\frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 4x^4$

f) $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$

Unidad 1: Expresiones Algebraicas.

Hay ocasiones en las que, de ser posible, conviene escribir una expresión algebraica como producto de dos o más factores. Por eso hay diversos recursos algebraicos a los que llamamos FACTORIZACIÓN. Factorizar un polinomio de *n* términos es expresarlo como un producto de polinomios primos.
A continuación, se detallan los diferentes casos de factoreo utilizados habitualmente.

- **Factor Común**

Se debe extraer el mayor factor común posible. Si los coeficientes son enteros, ese mayor factor común será el M. C.D de todos ellos, acompañado de las variables comunes con sus menores exponentes. Por ejemplo:

$\boldsymbol{P(x) = 6x^2 - 3x}$

$\boldsymbol{3x \rightarrow es\ el\ factor\ común\ de\ los\ dos\ términos}$

$\boldsymbol{P(x) = 3x.(2x - 1)}$

$\frac{\boldsymbol{6x^2}}{\boldsymbol{3x}}$ $\frac{\boldsymbol{3x}}{\boldsymbol{3x}}$ $\boldsymbol{dentro\ del\ paréntesis\ va\ lo\ que\ resulta\ de\ dividir\ cada\ término\ por\ 3x}$

Es importante destacar que en una expresión con dos o más términos puede extraerse cualquier factor común, por ejemplo: $Q(x) = 3x + 8 \rightarrow Q(x) = 3.\left(x + \frac{8}{3}\right)$

En algunos casos es posible aplicar un caso especial de factor común, el FACTOR COMÚN POR GRUPOS. Se puede aplicar a polinomios que no tiene un factor común en todos sus términos.

Por ejemplo:

$\boldsymbol{S(x) = 4x^3 - 2x^2 + 6x - 3}$

$\boldsymbol{S(x) = (4x^3 - 2x^2) + (6x - 3) \rightarrow se\ forman\ grupos\ de\ términos,}$

$\boldsymbol{de\ forma\ tal\ que\ en\ cada\ uno\ de\ ellos\ haya\ un\ factor\ común}$

$\boldsymbol{S(x) = \overset{2x^2}{2x^2}.(2x - 1) + \overset{3}{3}.(2x - 1) \rightarrow En\ cada\ término\ debe\ aparecer\ el\ mismo\ factor\ para\ poder\ extraerlo\ nuevamente\ como\ factor\ común}$

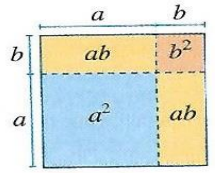
$\boldsymbol{S(x) = (2x^2 + 3).(2x - 1) \rightarrow Al\ sacar\ nuevamente\ factor\ común,\ la\ expresión\ queda\ factorizada}$

1. **Completen los espacios vacíos para que se verifiquen las siguientes igualdades**
   a) $12x^2 - 4x + \quad = \quad (\quad x^2 - x + \quad)$
   b) $x^7 + \quad = \quad (x^2 + 1)$
   c) $x^7 + \quad x^5 - 5x^3 = \quad (\quad -3x^2 + \quad)$
   d) $\quad + 48x^4 = 3x^4(5x^4 + \quad)$
2. **Factoricen los siguientes polinomios**
   a) $24x^5 + 18x^4 - 30x^2$
   b) $256m^2 + 144m^4$
   c) $24x^2y - 12xy + 6x^3y^4$
   d) $36x^2 - 24x^3 - 4x$
   e) $4x^3 - 2x^2 + 6x - 3$
   f) $x^6 + 2x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x + 4$
   g) $x^4 - x^3 + x - 1$
   h) $mx + m^2 + xy + my$

Cuadrado de un binomio

El cuadrado de un binomio es el producto de ese binomio por sí mismo, así que puede calcularse con la propiedad distributiva. Sin embargo, de esta forma se obtiene siempre un mismo trinomio que puede obtenerse fácilmente con una formula.

Expresa el área de un cuadrado de lado $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$

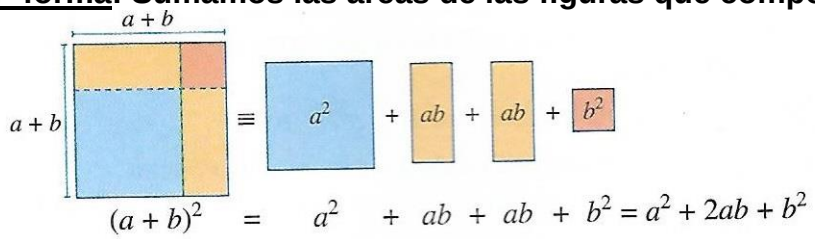


1° forma: Calculamos el área elevando un lado al cuadrado:

$\text{Área} = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$

$\text{Área} = \boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2 \quad \textit{Aplicamos la propiedad distributiva}$

2° forma: Sumamos las áreas de las figuras que componen el cuadrado



$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2$$

En ambos casos se obtiene: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2$

El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término, más el doble del producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo término.

Ejemplos:

- $(3\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}^2)^2 = (3\boldsymbol{x})^2+2.3\boldsymbol{x}.(-\boldsymbol{y}^2)+(-\boldsymbol{y}^2)^2 = 9\boldsymbol{x}^2-6\boldsymbol{xy}^2+\boldsymbol{y}^4$
- $(\boldsymbol{a}^3\boldsymbol{b}^2+5\boldsymbol{a}^4)^2 = (\boldsymbol{a}^3\boldsymbol{b}^2)^2+2.(\boldsymbol{a}^3\boldsymbol{b}^2).(5\boldsymbol{a}^4)+(5\boldsymbol{a}^4)^2 = \boldsymbol{a}^6\boldsymbol{b}^4+10\boldsymbol{a}^7\boldsymbol{b}^2+25\boldsymbol{a}^8$

3. Desarrolla los siguientes binomios al cuadrado:

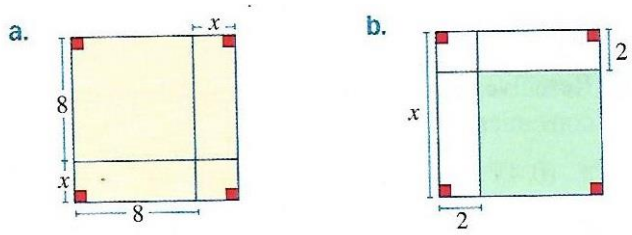
a) $(x+3)^2$

b) $(4x+5y)^2$

c) $(3x-2)^2$

d) $\left(m^3n^4+\frac{3}{4}m^2n\right)^2$

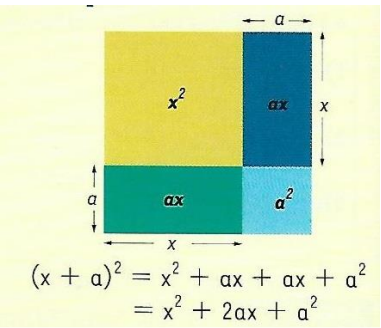
4. Expresa el área de la región coloreada en cada caso:



- **<u>Trinomio cuadrado perfecto</u>**

Es el desarrollo del cuadrado del binomio

$$\boxed{\boldsymbol{a^2 \pm 2ab \pm b^2 = (a \pm b).(a \pm b) = (a \pm b)^2}}$$



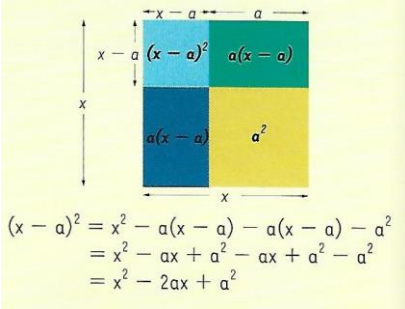
<u>Ejemplos</u>:

a) $P(x) = x^2 + 6x + 9 = \underset{x}{x^2} + 2.3x + \underset{3}{3^2} = (x + 3)^2$

b) $Q(x) = x^2 - 4x + 4 = \underset{x}{x^2} - 2.2x + \underset{2}{2^2} = (x - 2)^2$

c) $R(x) = x^2 + 8x + 9 = \underset{x}{x^2} + 2.4x + \underset{3}{3^2}$ $\quad 3 \neq 4$

No es trinomio cuadrado perfecto



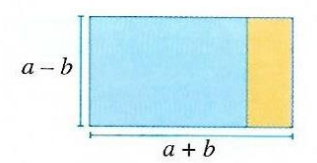
5. **Expresen cada trinomio cuadrado perfecto como el cuadrado de un binomio:**
   a) $x^2 - 10x + 25$
   b) $9x^2 - 12 + 4$
   c) $x^6 + 4x^4 + 4x^2$
   d) $\frac{1}{9}x^{10} + \frac{1}{3}x^5 + \frac{1}{4}$
   e) $x^2 + 3x + \frac{9}{4}$
   f) $x^6 + 4x^3 + 4$

- **<u>Diferencia de cuadrados</u>**

El producto entre un binomio y su conjugado es igual a la diferencia entre los cuadrados de los términos del binomio.

$$\boxed{\boldsymbol{(a - b).(a + b) \leftrightarrow a^2 - b^2}}$$

Expresa el área del rectángulo de la figura



Su área es igual al producto de la base $(a + b)$ por la altura $(a - b)$

$\acute{A}rea = (a + b).(a - b) \rightarrow aplicamos\ propiedad\ distributiva$

$\boldsymbol{\acute{A}rea = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2}$

<u>Ejemplos</u>:

- $\boldsymbol{(2x + 5y).(2x - 5y) = (2x)^2 - (5y)^2 = 4x^2 - 25y^2}$
- $\boldsymbol{\left(\frac{1}{4}a^3b - 3a^4\right).\left(\frac{1}{4}a^3b + 3a^4\right) = \left(\frac{1}{4}a^3b\right)^2 - (3a^4)^2 = \frac{1}{16}a^6b^2 - 9a^8}$

6. **Calcular los productos:**

a) $(4x-7).(4x+7)$

b) $\left(\sqrt{2x}+2\right).\left(\sqrt{2x}-2\right)$

c) $(2a^5+b^2).(2a^5-b^2)$

d) $\left(\frac{3}{2}x^n-5\right).\left(5+\frac{3}{2}x^n\right)$

7. **Escribir cada expresión como diferencia de cuadrados, siempre que se posible:**

a) $x^2-9=$

b) $100x^4-256=$

c) $9x^2-5=$

d) $4x^2-25=$

e) $x^6-\frac{1}{36}=$

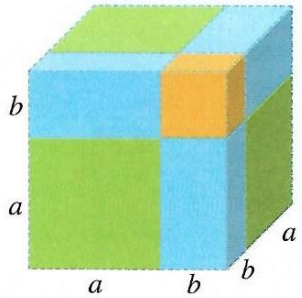
f) $x^2+25=$

<u>Cubo de un binomio</u>

Es igual al cubo del primer término, más el triple del producto del cuadrado de primer término por el segundo, más el triple del producto del primer término por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo término. A continuación, veremos el desarrollo para la obtención de la fórmula.

$$\boxed{(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})^3=\boldsymbol{a}^3\pm 3\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}\pm 3\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^2\pm\boldsymbol{b}^3}$$

Expresa algebraicamente el volumen de un cubo de arista $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$



$\boldsymbol{Volumen}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^3=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$

$\boldsymbol{Volumen}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).(\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2)\ \rightarrow \boldsymbol{aplicamos\ propiedad\ distributiva}$

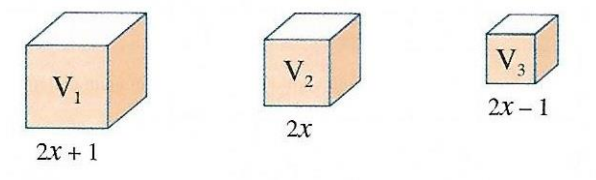
$\boldsymbol{Volumen}=\ \boldsymbol{a}^3+2\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{ab}^2+\boldsymbol{ba}^2+2\boldsymbol{ab}^2+\boldsymbol{b}^3$

$\boldsymbol{Volumen}=\boldsymbol{a}^3+3\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{ab}^2+\boldsymbol{b}^3$

<u>Ejemplos</u>:

- $(\boldsymbol{x}+6)^3=\boldsymbol{x}^3+3.\boldsymbol{x}.6^2+3.\boldsymbol{x}^2.6+6^3=\boldsymbol{x}^3+108\boldsymbol{x}+18\boldsymbol{x}^2+216$
- $\left(\boldsymbol{x}^5-2\boldsymbol{x}\right)^3=\left(\boldsymbol{x}^5\right)^3+3.\boldsymbol{x}^5.(-2\boldsymbol{x})^2+3.\left(\boldsymbol{x}^5\right)^2.(-2\boldsymbol{x})+(-2\boldsymbol{x})^3=\boldsymbol{x}^{15}+12\boldsymbol{x}^7-6\boldsymbol{x}^{11}-8\boldsymbol{x}^3$

8. ¿Cómo expresas el volumen de cada cubo?



9. Calcular los siguientes binomios al cubo:

a) $(6m^4+m)^3$
b) $(2a^2b^3c+3)^3$
c) $(5x^4-2y^2)^3$
d) $\left(\frac{2}{3}a^5-3b^4\right)^3$

- **<u>Cuatrinomio cubo perfecto</u>**

Es el desarrollo del cubo del binomio

$$\boldsymbol{x^3 \pm 3ax^2 \pm 3a^2x \pm a^3 = (x \pm a).(x \pm a).(x \pm a) = (x \pm a)^3}$$

Ejemplos:

a) $T(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = \underset{\substack{\downarrow \\ x}}{x^3} + 3.2.x^2 + 3.2^2.x + \underset{\substack{\downarrow \\ 2}}{2^3} = (x+2)^3$

b) $K(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = \underset{\substack{\downarrow \\ x}}{x^3} - 3.1x^2 + 3.1^2.x - \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{1^3} = (x-1)^3$

c) $M(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 8 \neq \underset{\substack{\downarrow \\ x}}{x^3} - 3.2x^2 + 3.2^2.x - \underset{\substack{\downarrow \\ 2}}{2^3} \rightarrow$ No es cuatrinomio cubo perfecto

$6 \neq 4 \quad 12 \neq 8$

10. Expresar cada Cuatrinomio cubo perfecto como el cubo de un binomio:

a) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$
b) $x^3 + 15x^2 + 75x + 125$
c) $\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - 1$
d) $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$

- **<u>Trinomio de Segundo Grado</u>**

Para descomponer en factores el trinomio de segundo grado $P(x) = ax^2 + bx + c$, se iguala a cero y se resuelve la ecuación de 2° grado, los valores de X que la satisfacen se encuentran aplicando una fórmula en la cual estos intervienen.

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0 \leftrightarrow X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}}$$

Si las soluciones a la ecuación son X_1 y X_2, el polinomio descompuesto será
$\boldsymbol{a.(x-x_1).(x-x_2)}$
<u>Ejemplos</u>:

$$\boldsymbol{P(x)=2x^2+x-3=0 \rightarrow a=2; b=1; c=-3}$$

$$\boldsymbol{X_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4.2.(-3)}}{2.2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{4}=\frac{-1\pm 5}{4}\rightarrow X_1=\frac{-1+5}{4}=1 \ y\ X_2=\frac{-1-5}{4}=-\frac{3}{2}}$$

$$\boldsymbol{P(x)=2.(x-1).\left(x+\frac{3}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{P(x)=2x^2+4x+2=0 \rightarrow a=2; b=4; c=2}$$

$$\boldsymbol{X_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4.2.2}}{2.2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-16}}{4}=\frac{-4\pm 0}{4}\rightarrow X_1=X_2=-1}$$

$$\boldsymbol{P(x)=2.(x+1).(x+1)=2.(x+1)^2}$$

11. Hallar las raíces del trinomio de segundo grado:

a) x^2-x-6
b) x^2-5x-6
c) $2x^2-8x+9$
d) $-3x^2-6x+9$

- **<u>Teorema de Gauss</u>**

Se utiliza para averiguar raíces de un polinomio.

Si el polinomio $P(x)$, de grado *n,* con coeficientes enteros y término independiente no nulo, admite una raíz racional $\frac{p}{q}$ (fracción irreducible), entonces *p* es divisor del término independiente y *q* lo es del coeficiente principal.

Para hallar las raíces racionales de un polinomio:

- Se buscan los divisores del término independiente y del coeficiente principal.
- Se buscan las posibles raíces: $\frac{p}{q}=\frac{divisores\ del\ término\ independiente}{divisores\ del\ coeficiente\ principal}$
- Se especializa el polinomio por las posibles raíces $(x_n\ es\ raíz\ si\ P(x_n)=0)$
- Una vez obtenida alguna de las raíces reales, se utiliza Regla de Ruffini o Trinomio de Segundo Grado para factorizar completamente el polinomio.

Todo polinomio P(x), de grado *n*, de *n* raíces reales, puede factorizarse como:
$P(x)=a.(x-x_1).(x-x_2).(x-x_3)\ldots\ldots(x-x_n)$ Siendo a el coeficiente principal del polinomio y $x_1; x_2; \ldots.; x_n$ sus raíces reales.

Ejemplo: Expresar en forma factorizada el polinomio $P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$

Coeficiente principal = 2; término independiente = -6

- Los divisores de $a\ (q)\ son\ \pm 1\ y \pm 2$
- Los divisores del término independiente $(p) son\ \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$
- Armamos las posibles raíces racionales $\frac{p}{q}$: ± 1; $\pm\frac{1}{2}$; ± 2; ± 3; $\pm\frac{3}{2}\ y\ \pm 6$
- Especializamos esos $\frac{p}{q}$ hasta hallar uno que lo anule:

$$P(-1) = 2.(-1)^3 - 11.(-1)^2 + 17.(-1) - 6 = -6$$
$$P(1) = 2.1^3 - 11.1^2 + 17.1 - 6 = 2$$
$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2.\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 11.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 17.\frac{1}{2} - 6 = 0\ \rightarrow x = \frac{1}{2}\ es\ raíz\ de\ P(x)$$

- Como $P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right).Q(x)$, calculamos $P(x)$: $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ para hallar $Q(x)$:

	2	-11	17	-6
$\frac{1}{2}$		1	-5	6
	2	-10	12	0

$$Q(x) = 2x^2 - 10x + 12$$

- Para factorizar $Q(x)$ podemos hallar sus raíces:

$$2x^2 - 10x + 12 = 0\ \rightarrow \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4.2.12}}{2.2} \rightarrow x = 2; x = 3$$

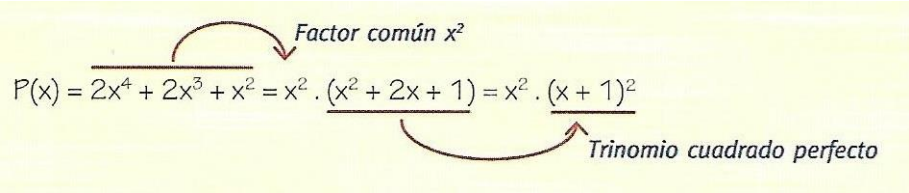
- **La factorización de $Q(x)$ será: $Q(x) = 2.(x-2).(x-3)$**
- **Finalmente, la factorización de $P(x)$ es: $P(x) = 2.\left(x - \frac{1}{2}\right).(x-2) - (x-3)$**

12. **Hallar las raíces utilizando el Teorema de Gauss de los siguientes polinomios y** factorizarlos:
    a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
    b) $-4x^4 + 2x^3 - 2x + 1$
    c) $x^3 - 31x - 30$
    d) $x^3 - 4x^2 - 3x + 18$
    e) $-2x^4 - 10x^3 - 18x^2 - 14x - 4$
    f) $3x^3 - 7x^2 - 22x + 8$

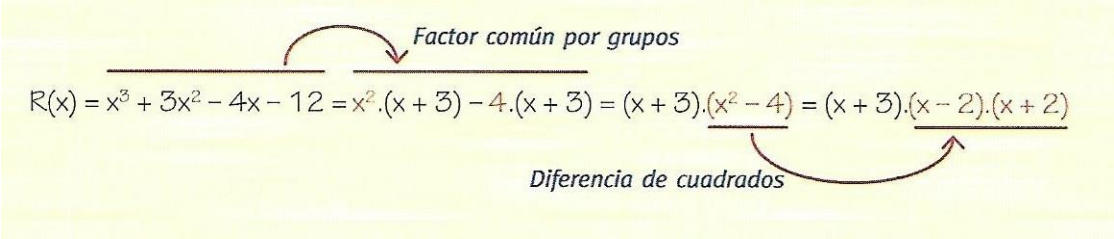
Casos combinados de factoreo

En algunos polinomios se deben aplicar varias veces los distintos casos de factorización.

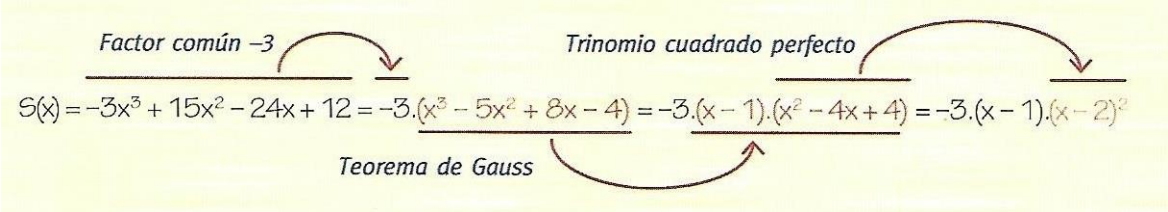
- **Siempre que sea posible se debe extraer factor común, y luego, se estudia si alguno de los factores se puede seguir descomponiendo en nuevos factores.**



- **Se analiza si es posible extraer factor común por grupos, y luego, se estudia si algunos de los factores se pueden seguir descomponiendo en nuevos factores.**



- **Se puede también aplicar el Teorema de Gauss.**



13. **Observar el procedimiento realizado para hallar la factorización de cada polinomio e indicar qué caso de factoreo se aplica en cada caso y si está resuelto correctamente. En caso contrario, escribir la factorización correspondiente.**

a) $x^3 - x^2 - 4x + 4$
$x^2.(x-1) - 4.(x-1)$
$(x^2 - 4).(x-1)$
$(x-2).(x+2).(x-1)$

b) $2x^2 + 18$
$2.(x^2 + 9)$
$2.(x-3).(x+3)$

c) $x^3 - 4x^2 + 4x$
$x.(x^2 - 4x + 4)$
$x.(x-2).(x-2)$

d) $x^4 - x^3 - x - 1$
$x^3.(x-1) - (x-1)$
$(x-1).(x^3 - 1)$

e) $2x^5 + 4x^4 + 2x^3$
$2x^3.(x^2 + 2x + 1)$
$2x^3.(x+1).(x+1)$

14. **Escribir los siguientes polinomios en forma factorizada:**

a) $2x^3 - 50x$
b) $2x^5 - \frac{2}{27}x^2$
c) $3x^3 - 12x^2 + 15x - 6$
d) $2x^6 - 16x^3$
e) $x^3 + 3x^2 + 4x + 12$
f) $x^3 + x^2 + \frac{1}{4}x$
g) $x^6 - \frac{1}{16}x^2$
h) $-x^4 + 3x^3 - \frac{9}{4}x^2$
i) $-4x^2 + 8x - 4$
j) $x^3 - 3x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$

Unidad 2: Función cuadrática.

Problema inicial

En un corralón de materiales se venden baldosas cuadradas a \$12 el m^2 y cobran \$14 por enviar el pedido en un flete.

a) ¿Cuánto cuesta comprar la cantidad de baldosas suficientes para embaldosar un patio cuadrado de 3m de lado, incluyendo el traslado?

b) ¿Cuánto cuesta comprar la cantidad de baldosas suficientes para embaldosar un patio cuadrado de 7m de lado, incluyendo el traslado?

c) ¿Cuál es la fórmula que permite determinar el costo de una compra de baldosas, en función de la medida del lado del patio cuadrado a embaldosar, incluyendo el flete?

d) Representar dicha fórmula en un sistema cartesiano.

Definición

A la función polinómica de segundo grado $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$, siendo a, b y c números reales y $\mathbf{a \neq 0}$, se la denomina **función cuadrática.**

- Los términos de la función reciben los siguientes nombres: $y = \mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c}$

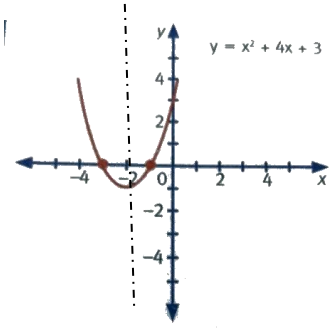
Término cuadrático ← $\mathbf{a}$; **Término lineal** ← $\mathbf{b}$; **término indep.** ← $\mathbf{c}$

- La representación gráfica de una función cuadrática es una **parábola.**

Ejemplo: $\mathbf{f(x) = x^2 + 4x + 3}$

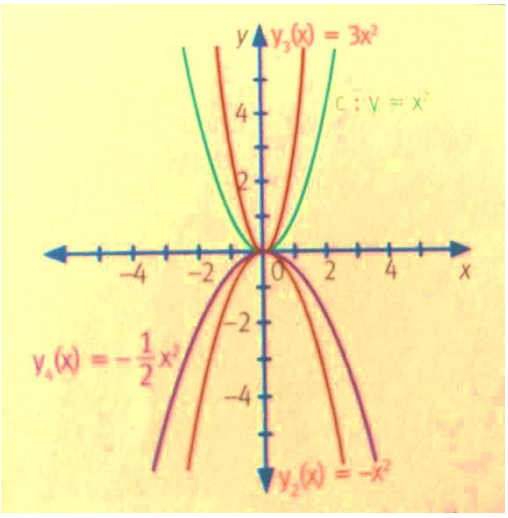
Para representarla construimos una tabla de valores, mediante la cual obtenemos algunos pares ordenados correspondientes a su gráfica.

x	y
-4	3
-3	0
-2	-1
-1	0
0	3
1	8



La gráfica de la función cuadrática recibe el nombre de **Parábola.** Sus dos ramas son simétricas respecto a una recta. En la gráfica construida, la recta **x=-2** es **Eje de Simetría** de la curva. Se llama **Vértice** al único punto de intersección de la parábola con su eje de simetría. En el ejemplo, el vértice es el punto **V=(-2;-1)**

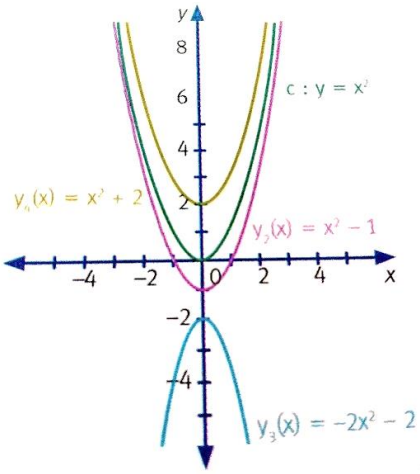
Estudio del coeficiente a



Dadas las funciones de la forma $f(x) = a.x^2$:

- Si a>0 la parábola va hacia arriba, es decir se llama cóncava hacia arriba
- Si a<0 la parábola va hacia abajo, es decir se llama cóncava hacia abajo.
- Si $0 < |a| < 1$, la parábola se abre respecto al eje de ordenadas.
- Si $|a| > 1$ la parábola se cierra respecto al eje de ordenadas.
- El vértice es el punto V= (0;0)

Desplazamiento Vertical



Dadas las funciones de la forma $f(x) = ax^2 + c$:

- Si c>0 la gráfica se desplaza hacia arriba.
- Si c<0 la gráfica se desplaza hacia abajo.
- El vértice es el punto V= (0;c)

Observemos que este desplazamiento no modifica el eje de simetría, pero sí la ordenada del vértice y el conjunto imagen de cada función.

1. **Completar el siguiente cuadro**:

	$f(x) = x^2$	$f(x) = x^2 + 2$	$f(x) = x^2 - 1$
Vértice			
Conj. Imagen			

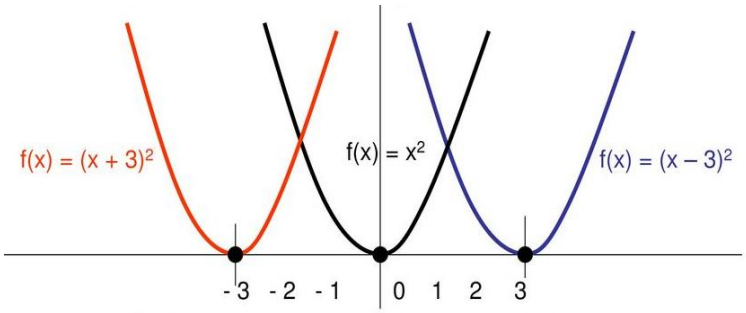
2. **Estudiar el comportamiento de las siguientes funciones, sin graficarlas.**

a. La fórmula $f(x) = x^2 - 3$ corresponde a la parábola $f(x) = x^2$ desplazada ……unidades hacia……El vértice es el punto……y su conjunto imagen es……..

b. La fórmula $f(x) = x^2 + 5$ corresponde a la parábola $f(x) = x^2$ desplazada ……unidades hacia……El vértice es el punto……y su conjunto imagen es……..

c. La fórmula $f(x) = x^2 + 4$ corresponde a la parábola $f(x) = x^2 - 1$ desplazada …… unidades hacia……El vértice es el punto……y su conjunto imagen es……..

<u>Desplazamiento Horizontal</u>



Dadas las funciones de la forma $f(x) = a.(x - p)^2$:

- Si p>0 la gráfica se desplaza hacia la derecha
- Si p<0 la gráfica se desplaza hacia la izquierda
- El vértice es el punto V= (p;0)

Observemos que este desplazamiento modifica el eje de simetría y la abscisa del vértice, pero no su ordenada ni el conjunto imagen de cada función.

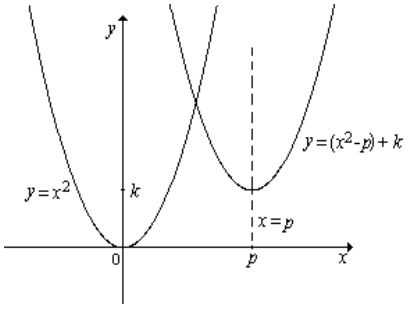
3. **Completar el siguiente cuadro:**

	$y = x^2$	$y = (x - 2)^2$	$y = (x + 1)^2$
Eje de simetría			$x = -1$
Vértice		(2 , 0)	

Si ahora trasladamos la gráfica $y = x^2$ una unidad hacia la derecha, y dos unidades hacia arriba, obtenemos la gráfica de la función $y = (x - 1)^2 + 2$.

Y si, trasladamos $y = x^2$ tres unidades hacia la izquierda y una unidad hacia abajo, obtenemos la gráfica de la función: $y = (x + 3)^2 - 1$.

De lo anterior resulta que: al desplazar la gráfica de $y = x^2$ p unidades en sentido horizontal y k unidades en sentido vertical,



obtenemos la gráfica de la función: $f(x) = (x - p)^2 + k$

donde su Vértice es el punto **V = (p; k)** y el **Eje de Simetría** es la recta de ecuación $x = p$.
Esta forma de expresión de la Función Cuadrática se llama **Canónica.**

4. **Indicar cuál fue el desplazamiento aplicado a la función $y = x^2$ para obtener cada una de las siguientes expresiones:**
   a. $y = (x - 5)^2$
   b. $y = (x + 4)^2 - \frac{7}{2}$
   c. $y = x^2 + 2{,}5$

<u>Raíces de una función cuadrática. Discriminante.</u>

Al radicando $b^2 - 4.a.c$ se lo llama Discriminante ya que el valor del mismo sirve para discriminar la naturaleza de las raíces y se lo simboliza con la letra griega Δ (delta):

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4.a.c}$$

Ejemplos:

a. $x^2 - 5x + 6 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.6}}{2.1}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Las raíces son números **reales y distintos**

b. $x^2 - 2x + 5 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.5}}{2.1}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = \begin{cases} x_1 = 1 + 2i \\ x_2 = 1 - 2i \end{cases}$$

Las raíces son números **complejos conjugados**

c. $9x^2 + 6x + 1 = 0$

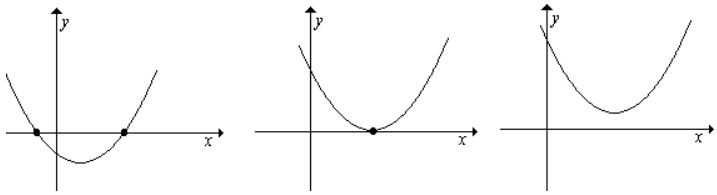
$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4.9.1}}{2.9}$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 0}{18} \longrightarrow x_1 = x_2 = -3$$

Las raíces son números **reales e iguales (raíz doble)**

Observemos que:

- Si $b^2 - 4\,a\,c > 0$, **la ecuación tiene dos raíces reales y distintas.**
- Si $b^2 - 4\,a\,c = 0$, **la ecuación tiene una única solución real; diremos que es una *raíz doble*.**
- Si $b^2 - 4\,a\,c < 0$, **la ecuación no tiene raíces reales; tiene dos raíces complejas.**



5. **Calcular el discriminante de cada función e indiquen si las raíces son iguales, distintas o no tiene raíces:**
   a. $y = -x^2 + 3x + 2$
   b. $y = x^2 - 6x - 18$
   c. $y = 2x^2 + 3x + 3$
   d. $y = 3x^2 - 2x - 1$

6. **Hallar los posibles valores de "m" para que se cumpla la condición pedida en cada caso:**
   a. $y = x^2 + \mathrm{m}\,x + 3$ tiene una raíz doble.
   b. $y = 2\,x^2 - x - \mathrm{m}$ no tiene raíces reales.
   c. El gráfico de las funciones de la forma $y = \mathrm{m}\,x^2 - x - 1$ interseca el eje x en dos puntos.
   d. El gráfico de las funciones de la forma $y = -\,x^2 - \mathrm{m}\,x - 5$ toca al eje x, pero no lo atraviesa.

<u>Forma factorizada</u>

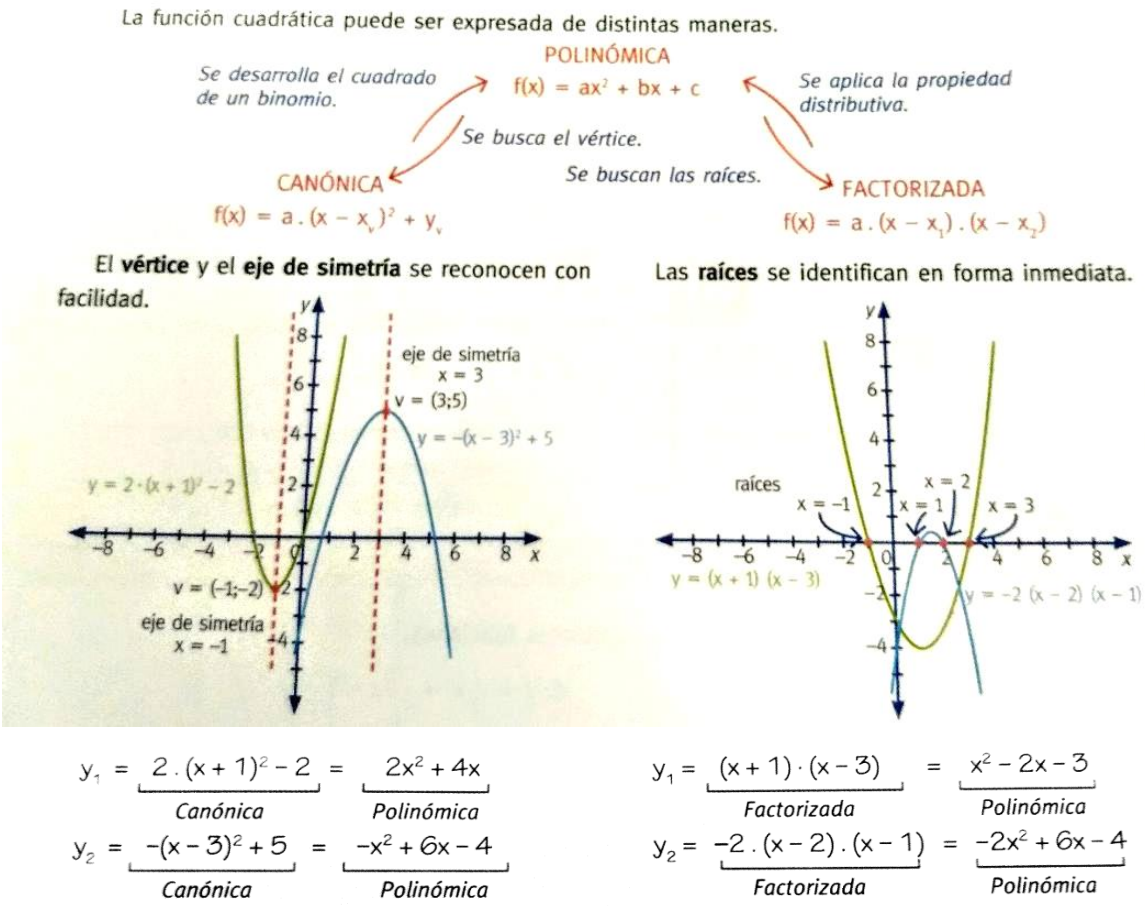
Si conocemos las raíces reales de la función cuadrática, puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\boxed{f(x) = a.(x - x_1).(x - x_2)}$$ **forma factorizada**

donde $\boldsymbol{x_1}$ y $\boldsymbol{x_2}$ son las raíces reales y **a** es el término cuadrático.

Ejemplo: La función $f(x) = 2.(x - 1).(x + 3)$ tiene raíces x=1 y x= -3

Distintas expresiones de la función cuadrática.



7. **Expresar cada una de las funciones en la forma que se pide:**
   a. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ en forma **canónica es……..**
   b. $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2).(x-3)$ en forma **polinómica es…….**

8. **Escribir las siguientes funciones en forma más conveniente de acuerdo a los datos y luego expresarla en forma polinómica**.
   a. El vértice es (-3;-2) y el coeficiente principal es -2.
   b. Las raíces son x= -4 y x=2 y el coeficiente principal es -1.
   c. El vértice es (-3;-2) y pasa por el punto (0;1)
   d. Corta al eje x en (-1;0) y (4;0) y pasa por el punto (-4;-6/5)

Propiedades de las Raíces

Las raíces x_1 y x_2 de una ecuación de segundo grado $(ax^2 + bx + c)$ y los coeficientes a, b y c de su forma polinómica se relacionan de la siguiente manera:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}} \qquad \boxed{x_1 . x_2 = \frac{c}{a}}$$

$$\mathrm{ax^2 + bx + c = 0} \rightarrow \frac{\mathrm{ax^2}}{\mathrm{a}} + \frac{\mathrm{bx}}{\mathrm{a}} + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}$$

Reconstruyan la ecuación de segundo cuyas raíces son $x_1 = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = 3$

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow -\frac{1}{2} + 3 = -\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{5}{2} = -\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = -\frac{5}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} = -\frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow y = x^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)x + \left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$y = 2x^2 - 5x - 3$$

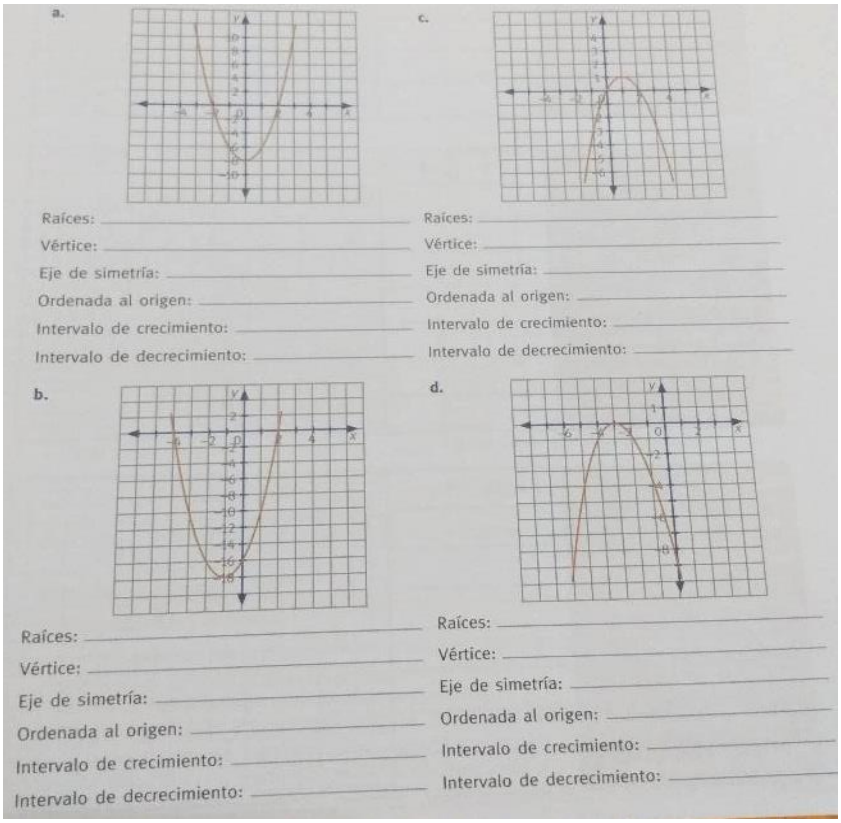
9. Escribir en forma polinómica cada una de las siguientes funciones cuadráticas:

a. Tiene por raíces a $x_1 = 2$ y a $x_2 = \frac{1}{2}$ y pasa por el punto P=(1;-3)

b. Tiene por raíces a $x_1 = 2$ y a $x_2 = -2$ y su ordenada al origen es 12.

c. Pasa por los puntos P=(2;0), Q=(-4;0) y R=(-2;-3)

10. Observar los gráficos y responder:



<u>Estudio completo</u>

- **Dom:** R
- **Ordenada al Origen:** es el punto donde la función corta al eje de ordenadas. Se calcula reemplazando a la función por x=0: $f(0) = a.0^2 + b.0 + c$. Es decir la O.O es : $f(0) = c$
- **Raíces:** son los puntos donde la función corta al eje de abscisas. Se calcula igualando a cero la función: $f(x) = 0$. Y se aplica la fórmula resolvente para hallar los valores de x.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- **Vértice**: es el punto máximo o mínimo de la función. Las coordenadas del vértice se calculan:

$x_v = \frac{x_1+x_2}{2}$ ó $x_v = -\frac{b}{2a}$ $\quad y_v = f(x_v)$ $\quad \boxed{V = (x_v; y_v)}$

- **Eje de simetría:** recta vertical de ecuación: $x = x_v$

- **Máximo/ Mínimo:** El vértice de la parábola es mínimo si la misma es cóncava hacia arriba o es máximo si la misma es cóncava hacia abajo.

- **Conjunto Positividad:** está formado por los intervalos reales donde la gráfica se encuentra por encima del eje de abscisas.

- **Conjunto de Negatividad:** está formado por los intervalos reales donde la gráfica se encuentra por debajo del eje de abscisas.

- **Intervalos de Crecimiento:** una función continua es creciente en un cierto intervalo de su dominio cuando al aumentar los valores de la variable independiente, aumentan los valores de la variable dependiente.

  En símbolos: f(x) es creciente si: $x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

- **Intervalos de Decrecimiento:** una función continua es decreciente en un cierto intervalo de su dominio cuando al aumentar los valores de la variable independiente, disminuyen los valores de la variable dependiente.

  En símbolos: f(x) es decreciente si: $x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

- **Conjunto Imagen (Img):** son todos los valores que toma la variable dependiente.

11. Analizar en forma completa las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^2 - x - 2$

b. $f(x) = 2.(X-3)^2 - 2$

c. $f(x) = -\frac{1}{2}.(X+2).(X-4)$

d. $f(x) = -X^2 + 2X + 3$

e. $f(x) = -(X+3)^2 + 1$

f. $f(x) = x^2 - 6x + 5$

g. $f(x) = 2.\left(x + \frac{1}{2}\right).(x - \frac{5}{2})$

h. $f(x) = 3.(x+1)^2$

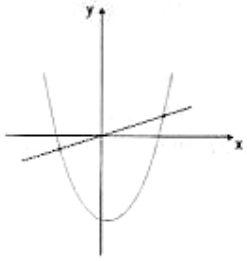
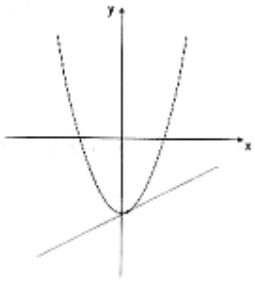
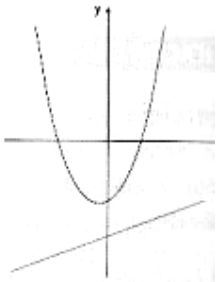
i. $f(x) = -\frac{1}{2}.x^2 + 2x$

j. $f(x) = x^2 + 6x + 10$

<u>Intersección de parábolas, parábolas y rectas</u>

Resolver analíticamente un sistema de ecuaciones significa encontrar los valores de las incógnitas que verifican simultáneamente las ecuaciones del sistema. Resolver gráficamente un sistema significa encontrar los puntos de intersección de ambas gráficas.

En los casos en que el sistema esté formado al menos por una ecuación de segundo grado, se puede reconocer cuántas soluciones tiene el mismo analizando el discriminante de la ecuación cuadrática que surge al resolver el sistema por el método de igualación o sustitución.

	$\Delta > 0$ **Dos** puntos de intersección	$\Delta = 0$ **Un** punto de intersección	$\Delta < 0$ **Ningún** punto de intersección
Sistema formado por una recta y una parábola $\begin{cases} y = mx + d \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$			

12. Resolver analítica y gráficamente cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = -x + 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = -2x^2 - 8x - 4 \\ y = -4x - 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = x - 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 3 \\ y = -x^2 + 8x - 15 \end{cases}$ e) $\begin{cases} y = x^2 + 4x + 3 \\ y = -2x - 5 \end{cases}$

<u>Ecuaciones de segundo grado.</u>

La fórmula general de las ecuaciones de segundo grado es:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0 \quad \wedge a \in R \ \wedge \ b \in R \ \wedge c \in R \quad \wedge a \neq 0}$$

• Si $b = 0$, la ecuación de segundo grado es incompleta de la forma $\mathbf{ax^2 + c = 0}$.

Para resolver este tipo de ecuaciones, se despeja el valor de la x teniendo en cuenta que $\sqrt[2]{x^2} = |x|$.

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= 0 \\ x^2 &= 9 \\ |x| &= \sqrt{9} \\ x_1 = 3 \wedge x_2 &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3x^2 + 6 &= 0 \\ -3x^2 &= -6 \\ x^2 &= 2 \\ |x| &= \sqrt{2} \\ x_1 = \sqrt{2} \wedge x_2 &= -\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x^2 + 49 &= 0 \\ -x^2 &= -49 \\ x^2 &= 49 \\ |x| &= \sqrt{49} \\ x_1 = 7 \wedge x_2 &= -7 \end{aligned}$$

• Si $c = 0$, la ecuación de segundo grado es incompleta de la forma $\mathbf{ax^2 + bx = 0}$.

Para resolver este tipo de ecuaciones, se debe tener en cuenta que dado $m \,.\, n = 0 \Rightarrow m = 0 \vee n = 0$

$$\begin{aligned} x^2 + 3x &= 0 \\ x \,.\, (x + 3) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + 3 = 0 \Rightarrow x_2 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -3x^2 + x &= 0 \\ x \,.\, (-3x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ -3x_2 + 1 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Si la ecuación es completa, o sea que ninguno de sus coeficientes es igual a cero, los valores de x que la satisfacen se encuentran aplicando una fórmula en la cual estos intervienen.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$2x^2 - 14x + 24 = 0 \Rightarrow a = 2 \wedge b = -14 \wedge c = 24$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 . 2 . 24}}{2 . 2} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 192}}{4} = \frac{14 \pm \sqrt{4}}{4} = \frac{14 \pm 2}{4}$$

$$x_1 = \frac{14 + 2}{4} = 4 \wedge x_2 = \frac{14 - 2}{4} = 3$$

$$-3x^2 + 2x + 4 = 0 \Rightarrow a = -3 \wedge b = 2 \wedge c = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 . (-3) . 4}}{2 . (-3)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 48}}{-6} = \frac{-2 \pm \sqrt{52}}{-6}$$

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{52}}{-6} \wedge x_2 = \frac{-2 - \sqrt{52}}{-6}$$

13. Resolver las siguientes ecuaciones:

a. $\mathbf{-3x^2 + 27 = 0}$

b. $\mathbf{x.(x + 3) - (3x - 4) = 0}$

c. $\mathbf{(x + 5).(x - 5) = 0}$

d. $\mathbf{-3x^2 - 5x = 0}$

e. $\mathbf{x.\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{35}{10}x = 0}$

f. $\mathbf{5x^2 - x = -3x + 2x^2 + 8}$

g. $\mathbf{2x.(x - 5) + 3x = 10.(\frac{1}{2} - x)}$

h. $\mathbf{(2x + 4)^2 = (x + 3)^2}$

i. $\mathbf{x - (1 - 3x^2) = 2x^2 - (-x - 3)}$

j. $\mathbf{1 - 4.(x^2 - x) = (2x - 1).(x - 1)}$

14. Plantear la ecuación y resolver:

a. La suma entre el triple de un número y su cuadrado es igual al opuesto de dos. ¿cuál es el número?

b. Hallar el perímetro de un rectángulo cuya área es $\mathbf{72}\boldsymbol{cm^2}$ y su altura es la mitad de la base.

c. La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 481. ¿cuáles son los números?

d. En un triángulo isósceles, la hipotenusa mide 2 cm más que un cateto ¿cuál es el área?

e. El producto entre dos números naturales consecutivos es 462. ¿Cuáles son los números?

15. Modelizar las siguientes situaciones utilizando la función cuadrática:

a. Un proyectil se dispara hacia arriba, su altura sobre el suelo , t segundos después del disparo esta dado por $\boldsymbol{s(t) = -4t^2 + 120t}$, donde s se mide en metros.

i. ¿para qué intervalos de t, el proyectil asciende y para cuales desciende?

ii. Determiná el instante en el que el proyectil alcanza su altura máxima y calcúlala.

iii. ¿Cuánto tardó el proyectil en llegar al suelo?

iv. Calculá la altura alcanzada 5 segundos después del disparo

v. Decidí cual es el Dominio y Conj. Imagen de la función en el contexto del problema.

b. Los ingresos mensuales de un fabricante de zapatos están dados por la función: $\boldsymbol{I(z) = 1000z - 2z^2}$, donde z es la cantidad de pares de zapatos que fabrica al mes.

i. ¿Qué cantidad de pares debe fabricar mensualmente para obtener el mayor ingreso?

ii. ¿Cuáles son los ingresos si se fabrican 125 pares de zapatos?

iii. ¿a partir de que cantidad de pares comienza a tener pérdidas?

c. En una isla se introdujeron iguanas. Al principio se reprodujeron rápidamente, pero los recursos de la isla comenzaron a escasear y la población decreció. El número de iguanas a los t años de haberlos dejado en la isla esta dado por:

$\boldsymbol{I(t) = -t^2 + 250t}$.

i. Calcular la cantidad de años en los cuales la población de iguanas aumentó

ii. ¿en qué momento la población de iguanas se extingue?

d. Un granjero decide criar patos y compra una cierta cantidad entre machos y hembras. Se empiezan a reproducir y la población crece en función del tiempo y este crecimiento está dado por la fórmula: $\boldsymbol{p(t) = -2t^2 + 20t + 22}$, en donde p es el número de patos y t los años transcurridos.

i. ¿Cuántos patos compró?

ii. ¿Cuándo se da la mayor población de patos, y cuántos son?

iii. ¿Cuándo hay 184 patos?

iv. ¿en algún momento se extinguen? Si es así ¿Cuándo?

Unidad 3: Trigonometría

Sistema de medición de ángulos.

Para medir ángulos se utilizan distintos sistemas de medición.

- **Sistema sexagesimal:** la unidad de medida en este sistema es el grado sexagesimal (1°), que se obtiene al dividir el ángulo recto en 90 partes iguales.
  Cada grado se divide en 60 minutos 1°----------60´
  Cada minuto se divide en 60 segundos 1´----------60´´ ⇒ 1°------3600´´

Ejemplo: ¿a cuántos grados minutos y segundos equivale un ángulo que mide 62,37°?

Ya sabemos que el ángulo mide 62°, para conocer el valor de los minutos utilizamos equivalencias aplicando "regla de tres" y calculamos:

1°--------60´
0,37°--------x´

$$x = \frac{0{,}37°.60´}{1°} = 22{,}2´$$

Hasta ahora podemos afirmar que el ángulo mide 62°22´ y nuevamente utilizando la regla de tres calculamos a cuantos segundos equivalen 0,2´

1´-------60´´
0,2´-----x´´

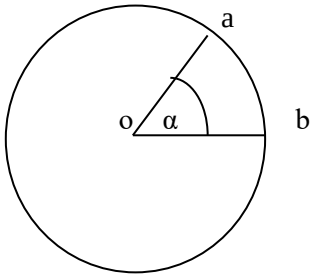
$$x = \frac{0{,}2´.60¨}{1´} = 12´´$$

De esta manera sabemos que el ángulo mide 62,37° o bien **62°22´12´´**

- **Sistema circular:** la unidad de medida en este sistema es el radian.

Se llama radian al ángulo que abarca un arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio de la misma.

$r = \overline{ob}$
$arco\ ab = \overline{ob}$
$\hat{\alpha} = 1\ radian$
$\hat{\alpha} = \frac{arco\ ab}{\overline{ob}}$



El valor de un ángulo de un giro es de 2π radianes
El valor de un ángulo llano es de π radianes.
El valor de un ángulo recto es de $\frac{\pi}{2}$ radianes

Relación entre los dos sistemas de medición de ángulos:

	Sistema sexagesimal (grado)	**Sistema circular (radian)**
Ángulo nulo	0°	0 rad
Angulo recto	90°	$\frac{\pi}{2} rad$
Angulo llano	180°	π rad
Angulo de un giro	360°	2π rad

Al utilizar la calculadora se puede trabajar con los dos sistemas de medidas, se presentan como modo:

- En modo DEGREE (DEG) la calculadora utiliza el sistema sexagesimal.
- En modo RADIAN (RAD) la calculadora utiliza el sistema circular.

1. Utilizando los datos del cuadro responder:

a. ¿Cuál es el ángulo, medido en sistema sexagesimal, que ne sistema circular mide 1,7 radianes?

b. ¿Cuál es el ángulo, medido en sistema circular, que ne sistema sexagesimal mide 30°?

c. Determinar cuál es el ángulo t, medido en sistema sexagesimal, si en el sistema circular mide $\frac{\pi}{3} rad$. ¿y $\frac{16}{3} \pi rad$?

Teorema del Seno y Coseno

Si queremos resolver situaciones en las que están incluidos triángulos no rectángulos, debemos utilizar los siguientes teoremas que relacionan los lados de **cualquier** triángulo con sus ángulos interiores.

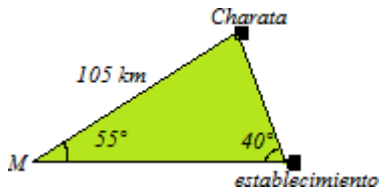
Por ejemplo, queremos resolver la siguiente situación…

Se necesita conocer el costo que insumirá el transporte de gaseosas de una empresa, desde su establecimiento hasta la ciudad de Charata en Chaco. Por los datos obtenidos con el GPS y viajes anteriores, se conoce la siguiente información:

El costo por km recorrido de transporte es de $1,30.

El viaje se realizará por la ruta que une ambos destinos en forma directa, sin pasar por el punto M de intersección de rutas.

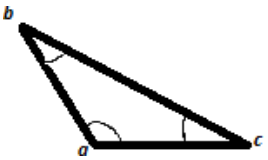
El GPS nos indica el siguiente gráfico:



¿Cuál es el costo del viaje? Notemos que el triángulo que determina el problema no es rectángulo, ya que los ángulos conocidos no son rectos y la suma es superior a 90°. Entonces, para hallar la solución debemos completar el estudio de las relaciones trigonométricas con los siguientes teoremas:

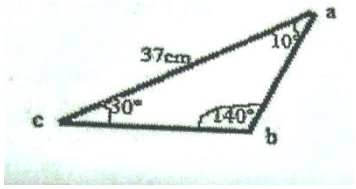
- **Teorema del Seno:**

"En todo triángulo sus lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos"



$$\boxed{\frac{\overline{ab}}{sen\hat{c}} = \frac{\overline{ac}}{sen\hat{b}} = \frac{\overline{bc}}{sen\hat{a}}}$$

Ejemplo: Dado el siguiente triangulo, calcular los lados que faltan:



Para calcular los lados $\overline{ab}$ y $\overline{bc}$ se aplica el Teorema del Seno:

Ejemplo:

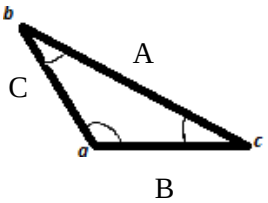
Dado el siguiente triangular calcular los lados que faltan:

$$\frac{37cm}{sen\ 140°} = \frac{\overline{ab}}{sen30°} \Rightarrow \overline{ab} = 28{,}78\ cm$$

$$\frac{37cm}{sen\ 140°} = \frac{\overline{bc}}{sen10°} \Rightarrow \overline{bc} = 10\ cm$$

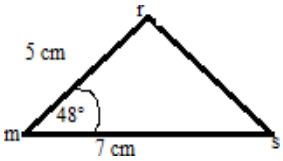
- **Teorema del Coseno:**

"El cuadrado de uno de los lados de un triángulo, es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble del producto de dichos lados por el coseno del ángulo que forman"



$$\bar{A}^2 = \bar{B}^2 + \bar{C}^2 - 2.B.C.cos\hat{a}$$
$$\bar{B}^2 = \bar{A}^2 + \bar{C}^2 - 2.A.C.cos\hat{b}$$
$$\bar{C}^2 = \bar{A}^2 + \bar{B}^2 - 2.A.B.cos\hat{c}$$

Ejemplo: Dado el siguiente triángulo, calcular el lado que falta:



$$\bar{M}^2 = \bar{S}^2 + R^2 - 2.S.R.cos\hat{m}$$
$$\bar{M}^2 = 25cm^2 + 49cm^2 - 2.5cm.7cm.0{,}67$$
$$\bar{M}^2 \cong 27{,}1\ cm^2$$
$$\bar{M} \cong 5{,}21\ cm$$

Ahora estamos en condiciones de resolver el problema planteado al comienzo:
Utilizando el Teorema del Seno relacionamos los datos que nos informa el gps en el triángulo, con la distancia que queremos averiguar:

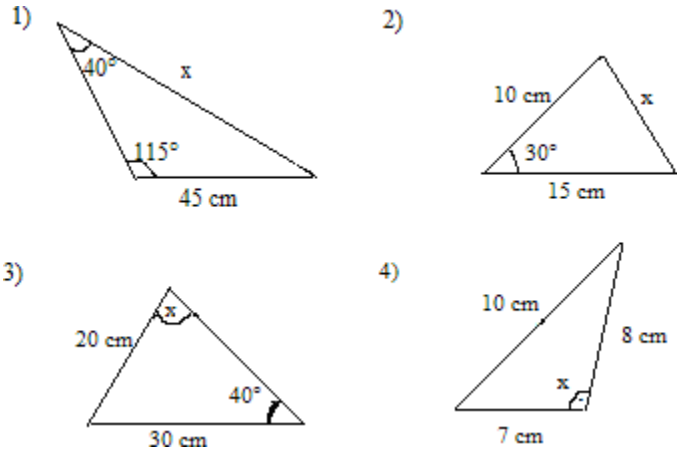
$$\frac{105km}{sen40°} = \frac{x}{sen55°} \Rightarrow x = \frac{105km.sen55°}{sen40°} \Rightarrow x = 133{,}81km$$

Para responder la pregunta tenemos que calcular el costo de cada viaje:

Costo total=$133{,}81km.\$1{,}3 = \$173{,}96$

Rta: A la empresa le cuesta cada viaje $173,96.

2. Calcular el valor de x en cada una de los triángulos.



<u>Resolución de triángulos oblicuángulos.</u>

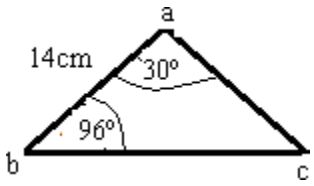
Un triángulo es oblicuángulo cuando ninguno de sus ángulos interiores es recto, y resolverlo es hallar el valor de sus tres ángulos y sus tres lados. Para ello hay que aplicar el teorema del seno, del coseno y las propiedades de los ángulos interiores de un triángulo.

Siempre que sea posible se deben utilizar los datos, en lugar de los resultados obtenidos.

<u>Casos que se aplica el Teorema del Seno:</u>

1. **Cuando se conocen dos ángulos y un lado.**

<u>Ejemplo:</u>



<u>Resolución:</u>

a. Se busca el $\hat{c}$: $\hat{c} = 180° - (\hat{a} + \hat{b})$

$\hat{c} = 180° - (30° + 96°)$

$\hat{c} = 54°$

b. Hallamos el lado A: $\frac{A}{sen\ \hat{a}} = \frac{C}{sen\ \hat{c}}$

$$\frac{A}{sen\ 30°} = \frac{14cm}{sen\ 54°}$$

$$\frac{A}{0{,}5} = \frac{14cm}{0{,}81}$$

$$A = \frac{14cm.0{,}5}{0{,}81} = 864cm$$

c. Hallamos el lado B: $\frac{B}{sen\ \hat{b}} = \frac{C}{sen\ \hat{c}}$

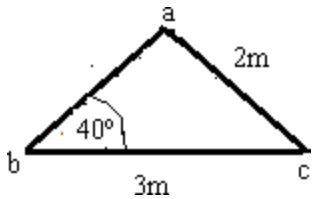
$$\frac{B}{sen\ 96°} = \frac{14cm}{sen\ 54°}$$

$$\frac{B}{0{,}99} = \frac{14cm}{0{,}81}$$

$$B = \frac{14cm.0{,}99}{0{,}81} = 17{,}11cm$$

2. **Cuando se conocen dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos:**

Ejemplo:



Resolución:

a. Se busca $\hat{a}$: $\hat{a} = \frac{A}{sen\hat{a}} = \frac{B}{sen\hat{b}}$

$$\frac{3m}{sen\ \hat{a}} = \frac{2m}{sen\ 40°}$$

$$\frac{3m}{sen\ \hat{a}} = \frac{2m}{0{,}64}$$

$$3m.0{,}64 = 2m.sen\hat{a}$$

$$\hat{a} = arcsen0{,}96 = 73°44´23"$$

b. Se busca $\hat{c}$: $\hat{c} = 180° - (\hat{a} + \hat{b})$

$$\hat{c} = 180° - (73°44´23" + 40°)$$

$$\hat{c} = 66°15´37"$$

c. Hallamos el lado C: $\frac{B}{sen\ \hat{b}} = \frac{C}{sen\ \hat{c}}$

$$\frac{2m}{sen\ 40°} = \frac{C}{sen\ 66°15´37"}$$

$$\frac{2m}{0{,}64} = \frac{C}{0{,}91}$$

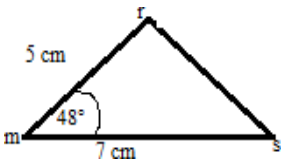
$$2m.0{,}91 = C.0{,}64$$

$$C = 2{,}84m$$

Casos en que se aplica el Teorema del Coseno:

1. **Cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.**

Ejemplo:



Resolución:

1. Hallamos el lado M:

$$\bar{M}^2 = \bar{S}^2 + \bar{R}^2 - 2.\bar{S}.\bar{R}.cos\hat{m}$$

$$\bar{M}^2 = 25cm^2 + 49cm^2 - 2.5cm.7cm.0{,}67$$

$$\bar{M}^2 = 27{,}1cm^2$$

$$\bar{M} = 5{,}21cm$$

2. Se busca $\hat{r}$: Se puede recurrir al Teorema del Seno.

$$\frac{R}{sen\hat{r}} = \frac{M}{sen\hat{m}}$$

$$\frac{7cm}{sen\ \hat{r}} = \frac{5{,}21cm}{sen\ 48°}$$

$$\frac{7cm}{sen\ \hat{r}} = \frac{5{,}21cm}{0{,}74}$$

$$\hat{r} = arcsen0{,}99 = 81°53´25"$$

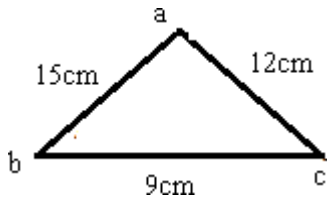
3. Se busca $\hat{s}$: $\hat{s} = 180° - (\hat{m} + \hat{r})$

$$\hat{s} = 180° - (48° + 81°53´25")$$

$$\hat{s} = 50°6´35"$$

2. **Cuando se conocen los tres lados.**

Ejemplo:



Resolución:

a. Se busca $\hat{a}$:

$$\bar{A}^2 = \bar{B}^2 + \bar{C}^2 - 2.\bar{B}.\bar{C}.cos\hat{a}$$
$$81cm^2 = 144cm^2 + 225cm^2 - 2.12cm.15cm.cos\hat{a}$$
$$81cm^2 - 369cm^2 = -360cm^2.cos\hat{a}$$
$$\frac{-288cm^2}{-360cm^2} = cos\hat{a}$$
$$\hat{a} = arccos0{,}8 = 36°52'11"$$

b. Se busca $\widehat{b}$:

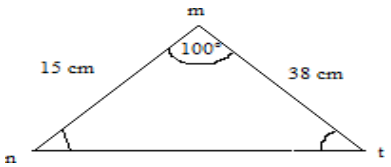
$$\bar{B}^2 = \bar{A}^2 + \bar{C}^2 - 2.\bar{A}.\bar{C}.cos\hat{b}$$
$$144cm^2 = 81cm^2 + 225cm^2 - 2.9cm.15cm.cos\hat{b}$$
$$144cm^2 - 306cm^2 = -270cm^2.cos\hat{b}$$
$$\frac{-162cm^2}{-270cm^2} = cos\hat{b}$$
$$\hat{b} = arccos0{,}6 = 53°7'48"$$

c. Se busca $\hat{c}$:

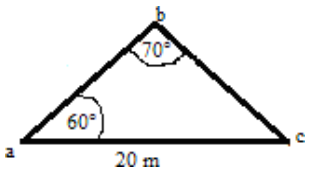
$$\hat{c} = 180° - (\hat{a} + \hat{b})$$
$$\hat{c} = 180° - (36°52'11" + 53°7'48")$$
$$\hat{c} = 90°0'1"$$

3. **Resolver los siguientes triángulos:**

a.

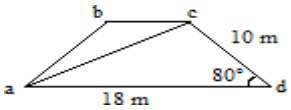


b.

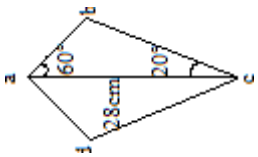


4. **Resolver:**

a. Calcular el valor de la diagonal *ac* del trapecio isósceles abcd.

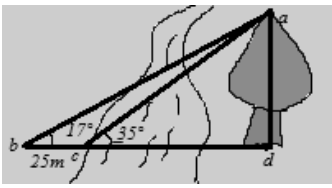


b. Calcular el perímetro del romboide abcd.



5. **Plantear y resolver los siguientes problemas.**

a. Un árbol está situado a la orilla de un río. El extremo superior del árbol, desde un cierto punto (ubicado en la otra margen del río), determina un ángulo de elevación de 17°. Si a 25 m de dicho punto en dirección del árbol, el ángulo es de 35°, ¿Cuál es la altura del mismo?



b. Dos automóviles se encuentran transitando una misma autopista, en un punto la autopista se bifurca en dos caminos que forman entre sí un ángulo de 32° y cada automóvil sigue por un camino diferente. Si el primer automovilista continúa por uno de los caminos a una velocidad constante de 75km por hora y el otro automovilista lo hace a 90km por hora, ¿a qué distancia, entre sí, se encuentran los automóviles una hora después que se separaron?

c. En una plazoleta de forma triangular, los lados miden 60m, 75m y 50m. ¿Qué ángulos se forman en las esquinas de la misma?

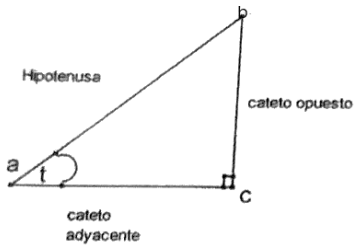
Identidades trigonométricas

Las identidades trigonométricas son igualdades en las cuales aparecen razones trigonométricas y resultan verdaderas para cualquier valor de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo.
Para resolver una identidad trigonométrica se desarrollan uno o ambos miembros de la misma, tratando de obtener expresiones equivalentes. Para ello se utilizan las relaciones que se establecen entre las razones trigonométricas de un mismo ángulo.

Relaciones entre las razones trigonométricas de un mismo ángulo

Relación pitagórica

En odo triángulo rectángulo se cumple la siguiente relación entre el seno y coseno de cada uno de los ángulos agudos:



$$sen^2t + cos^2t = \left(\frac{\overline{bc}}{\overline{ab}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{ac}}{\overline{ab}}\right)^2$$

$$sen^2t + cos^2t = \frac{\overline{bc}^2 + \overline{ac}^2}{\overline{ab}^2}$$

$$sen^2t + cos^2t = \frac{\overline{ab}^2}{\overline{ab}^2}$$ por Teorema de Pitágoras

$$\boxed{sen^2t + cos^2t = 1}$$

Relaciones recíprocas
Entre las relaciones trigonométricas, tres de ellas se relacionan recíprocamente respecto de las otras tres:

$$\boxed{sen\hat{\alpha} = \frac{1}{cosec\hat{\alpha}}} \quad \boxed{cos\hat{\alpha} = \frac{1}{sec\hat{\alpha}}} \quad \boxed{tg\hat{\alpha} = \frac{1}{cotg\hat{\alpha}}}$$

Relación entre la tangente, el seno y coseno
El cociente entre el seno y coseno de un mismo ángulo, expresados ambos como razones es:

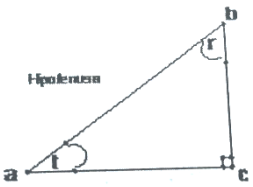
$\frac{sen\hat{t}}{cos\hat{t}} = \frac{\frac{\overline{bc}}{\overline{ab}}}{\frac{\overline{ac}}{\overline{ab}}}$ simplificamos y nos queda: $\frac{sen\hat{t}}{cos\hat{t}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{ac}}$

Como la razón obtenida es la tangente, entonces: $\boxed{tg\hat{t} = \frac{sen\hat{t}}{cos\hat{t}}}$

Y del mismo modo se obtiene la igualdad: $\boxed{cotg\hat{t} = \frac{cos\hat{t}}{sen\hat{t}}}$

Razones trigonométricas de ángulos complementarios

El triángulo abc de la figura es rectángulo, en consecuencia, la suma de las medidas de los ángulos agudos es igual a 90°, es decir, ambos ángulos son complementarios.
En símbolos: $\hat{t} + \hat{r} = 90°$



De esta igualdad deducimos: $\boxed{\begin{array}{l}\hat{t} = 90° - \hat{r} \\ \hat{r} = 90° - \hat{t}\end{array}}$ *

Por otro lado, $cos\hat{t} = \frac{\overline{ac}}{\overline{ab}}$ y $sen\hat{r} = \frac{\overline{ac}}{\overline{ab}} \Rightarrow \boxed{cos\hat{t} = sen\hat{r}}$

Además, por (*): $\boxed{\begin{array}{l}cos\hat{t} = sen(90° - \widehat{t}) \\ sen\hat{t} = cos(90° - \widehat{t})\end{array}} \Rightarrow \boxed{sen\hat{t} = cos\hat{r}}$

Identidades trigonométricas

a. $1 + tg^2\hat{\alpha} = sec^2\hat{\alpha}$

$$1 + \frac{sen^2\hat{\alpha}}{cos^2\hat{\alpha}} = sec^2\hat{\alpha}$$

$$\frac{cos^2\hat{\alpha} + sen^2\hat{\alpha}}{cos^2\hat{\alpha}} = sec^2\hat{\alpha}$$

$$\frac{1}{cos^2\hat{\alpha}} = sec^2\hat{\alpha}$$

$$sec^2\hat{\alpha} = sec^2\hat{\alpha}$$

b. $1 + cotg^2\hat{\alpha} = cosec^2\hat{\alpha}$

$$1 + \frac{cos^2\hat{\alpha}}{sen^2\hat{\alpha}} = cosec^2\hat{\alpha}$$

$$\frac{sen^2\hat{\alpha} + cos^2\hat{\alpha}}{sen^2\hat{\alpha}} = cosec^2\hat{\alpha}$$

$$\frac{1}{sen^2\hat{\alpha}} = cosec^2\hat{\alpha}$$

$$cosec^2\hat{\alpha} = cosec^2\hat{\alpha}$$

c. $(sen\hat{\alpha} + 1).(sen\hat{\alpha} - 1) = -cos^2\hat{\alpha}$

$$sen^2\hat{\alpha} - 1 = -cos^2\hat{\alpha}$$

$$sen^2\hat{\alpha} - (sen^2\hat{\alpha} + cos^2\hat{\alpha}) = -cos^2\hat{\alpha}$$

$$sen^2\hat{\alpha} - sen^2\hat{\alpha} - cos^2\hat{\alpha} = -cos^2\hat{\alpha}$$

$$-cos^2\hat{\alpha} = -cos^2\hat{\alpha}$$

d. $cosec\hat{\alpha}.tg\hat{\alpha} = sec\hat{\alpha}$

$$\frac{1}{sen\hat{\alpha}}.\frac{sen\hat{\alpha}}{cos\hat{\alpha}} = sec\hat{\alpha}$$

$$\frac{1}{cos\hat{\alpha}} = sec\hat{\alpha}$$

$$sec\hat{\alpha} = sec\hat{\alpha}$$

e. $(sen\hat{\alpha} + cos\hat{\alpha})^2 = 2tg\hat{\alpha}.cos^2\hat{\alpha} + 1$

$$sen^2\hat{\alpha} + 2.sen\hat{\alpha}.cos\hat{\alpha} + cos^2\hat{\alpha}$$

$$= 2.\frac{sen\hat{\alpha}}{cos\hat{\alpha}}.cos^2\hat{\alpha} + 1$$

$$1 + 2.sen\hat{\alpha}.cos\hat{\alpha} = 2.sen\hat{\alpha}.cos\hat{\alpha} + 1$$

6. Resolver las siguientes identidades trigonométricas:

a. $\frac{1+cos\hat{\alpha}}{sen\hat{\alpha}} + tg\hat{\alpha} = \frac{1+cos\hat{\alpha}}{sen\hat{\alpha}.cos\hat{\alpha}}$

b. $\frac{1+tg\hat{\alpha}}{1+cotg\hat{\alpha}} = tg\hat{\alpha}$

c. $cos\hat{\alpha}.(tg\hat{\alpha} + 1) - cos\hat{\alpha} = sen\hat{\alpha}$

d. $(sec^2\hat{\alpha} - 1).cosec^2\hat{\alpha}.cotg\hat{\alpha} = \frac{1}{cos\hat{\alpha}.sen\hat{\alpha}}$

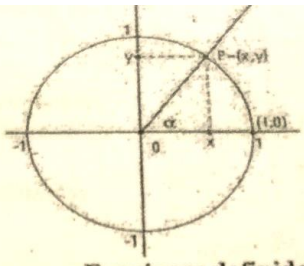
Funciones trigonométricas

- **Circunferencia trigonométrica**

Se denomina circunferencia trigonométrica a una circunferencia de radio 1 con centro en el origen de coordenadas.

La rotación de la semirrecta $\overrightarrow{op}$, con centro en el punto (0;0) y el ángulo de giro $\hat{\alpha}$, corta a la circunferencia en un punto $P = (x_1; y_1)$ y determina un triángulo rectángulo $\widehat{ox_1p}$.

El radio de la circunferencia vale 1 $\Rightarrow$ $\overline{op}$ = **radio de la circunferencia = 1**



Razones trigonométricas

$$\text{Sen } \hat{\alpha} = \frac{\textit{medida}\ \text{cateto opuesto}}{\text{medida hipotenusa}} \dashrightarrow \text{Sen } \hat{\alpha} = \frac{y}{\overline{op}} \text{ y } \overline{op}=1 \Rightarrow \boxed{\text{Sen } \hat{\alpha} = y}$$

$$\text{Cos } \hat{\alpha} = \frac{\textit{medida}\ \text{cateto adyacente}}{\text{medida hipotenusa}} \dashrightarrow \text{Cos } \hat{\alpha} = \frac{x}{\overline{op}} \text{ y } \overline{op}=1 \Rightarrow \boxed{\text{Cos } \hat{\alpha} = x}$$

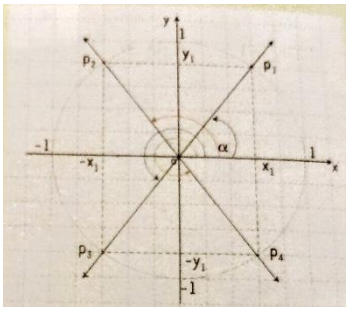
$$\text{Tg } \hat{\alpha} = \frac{\textit{medida}\ \text{cateto opuesto}}{\text{medida cateto adyacente}} \dashrightarrow \boxed{\text{Tg } \hat{\alpha} = \frac{y}{x}}$$

Funciones definidas en la circunferencia trigonométrica

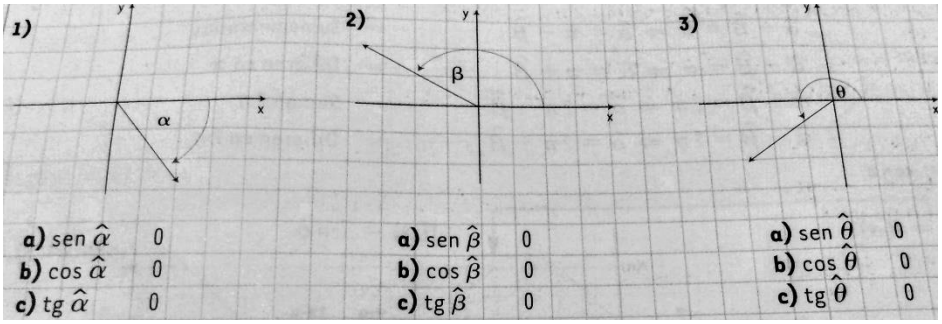
- **Positividad y Negatividad de las funciones trigonométricas**

Para determinar el signo de las funciones trigonométricas se debe conocer a que cuadrante el ángulo y los signos de las coordenadas del punto $P = (x; y)$

Cuadrante	sen $\hat{\alpha}$	cos $\hat{\alpha}$	tg $\hat{\alpha}$
I	+	+	+
II	+	−	−
III	−	−	+
IV	−	+	−

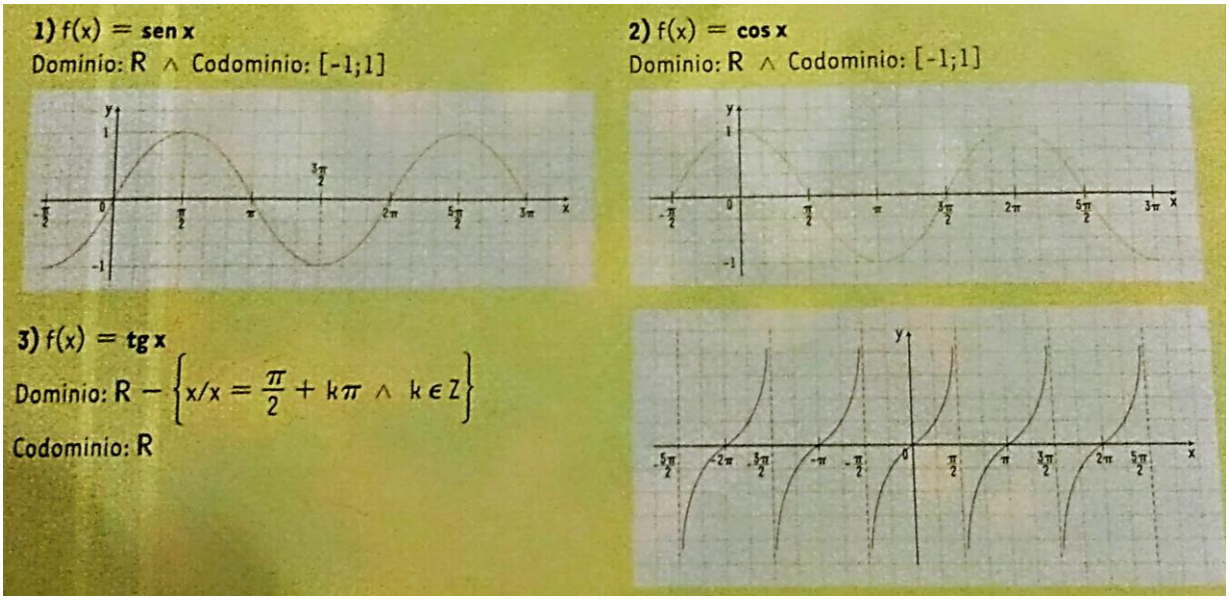


7. Completar con > o < según corresponda en cada caso



1)		2)		3)	
a) sen $\hat{\alpha}$	0	a) sen $\hat{\beta}$	0	a) sen $\hat{\theta}$	0
b) cos $\hat{\alpha}$	0	b) cos $\hat{\beta}$	0	b) cos $\hat{\theta}$	0
c) tg $\hat{\alpha}$	0	c) tg $\hat{\beta}$	0	c) tg $\hat{\theta}$	0

Representación gráfica de las funciones trigonométricas



Características de la función $F(x) = senx$

- **Raíces:** corta al eje x en todos los puntos $k.\pi$ $(k \in Z)$
- **Int. Eje y:** (0;0)
- **Amplitud:** sus imágenes están entre 1 y -1. La amplitud es 1.
- **Período:** es 2π, osea, que "repite el ciclo" cada 360°.
- **Crecimiento:** $(\mathbf{0}; \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}) \cup (\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\pi}; \mathbf{2}\boldsymbol{\pi})$
- **Decrecimiento:** $(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}; \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\pi})$

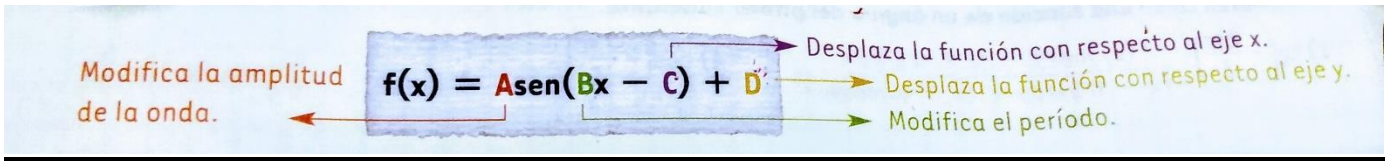
Características de la función $F(x) = cosx$

- **Raíces:** corta al eje x en todos los puntos $\frac{\pi}{2} + k.\pi$ $(k \in Z)$
- **Int. Eje y:** (0;1)
- **Amplitud:** sus imágenes están entre 1 y -1. La amplitud es 1.
- **Período:** es 2π, osea, que "repite el ciclo" cada 360°.
- **Crecimiento:** $(\boldsymbol{\pi}; \mathbf{2}\boldsymbol{\pi})$
- **Decrecimiento:** $(\mathbf{0}; \boldsymbol{\pi})$

Características de la función $F(x) = tgx$

- **Raíces:** corta al eje x en todos los puntos $k.\pi$ $(\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{Z})$
- **Int. Eje y:** (0;0)
- **Amplitud:** no está acotada**.**
- **Período:** es π, osea, que "repite el ciclo" cada 180°.
- **Crecimiento:** es estrictamente creciente en todo su dominio.
- **Asíntotas verticales:** $y = \pi/2 + k\cdot\pi$ con $k \in Z$
- **Es discontinua en los puntos** $\pi/2 + k\cdot\pi$ con $k \in Z$

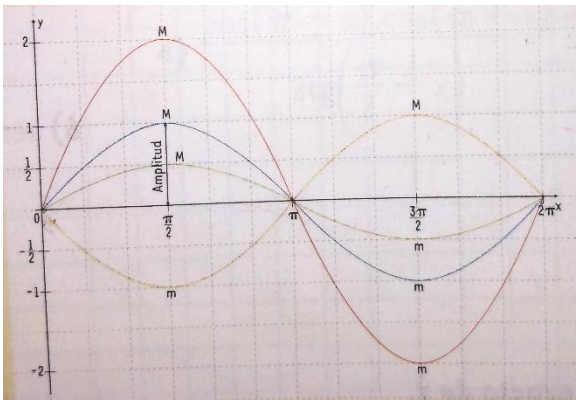
Amplitud, periodo y ángulo de fase.



- **Amplitud**

$|A|$: indica la amplitud de la función y es la semidistancia entre el máximo y el mínimo dela función.

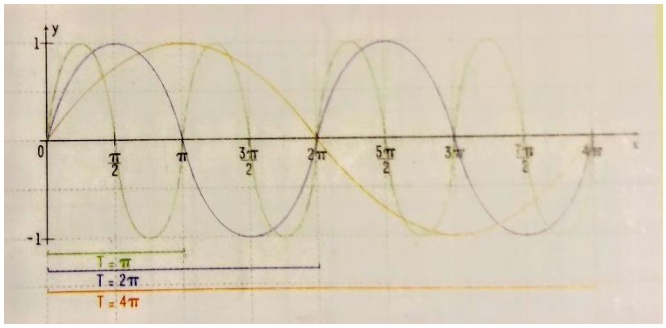
	A	Conjunto Imagen
$f(x) = senx$	1	$[-1; 1]$
$f(x) = 2senx$	2	$[-2; 2]$
$f(x) = -senx$	-1	$[-1; 1]$
$f(x) = \frac{1}{2}senx$	$\frac{1}{2}$	$\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$



- **Período:**

B: modifica el período (duración de un ciclo) de la función sin modificar su amplitud.

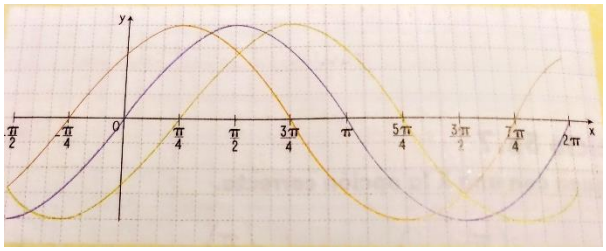
	B	Período: T=$\frac{2\pi}{\lvert B\rvert}$
$f(x) = senx$	1	2π
$f(x) = sen(2x)$	2	π
$f(x) = sen(\frac{1}{2}x)$	$\frac{1}{2}$	4π



- **Ángulo de fase**

$\frac{C}{B}$: desplaza la función con respecto al eje x; si es positivo, hacia la derecha, y si es negativo hacia la izquierda.

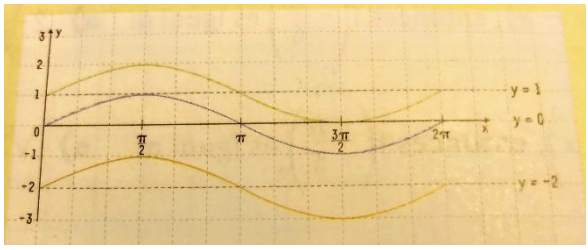
	$\frac{C}{B}$	Ángulo de fase
$f(x) = senx$	0	0(no se desplaza)
$f(x) = sen(x - \frac{\pi}{4})$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$ hacia la derecha
$f(x) = sen(x + \frac{\pi}{4})$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$hacia la izquierda



- **<u>Desplazamiento respecto del eje y</u>**

<u>D</u>: desplaza la función respecto del eje y; sie s positivo, hacia arriba, y si es negativo, hacia abajo.

	D	Desplazamiento
$f(x) = senx$	0	0(no se desplaza)
$f(x) = senx + 1$	1	1 unidad hacia arriba
$f(x) = senx - 2$	-2	2 unidades hacia abajo



8. Unir con una flecha cada función con su correspondiente período.

1. $f(x) = sen\ (-3x)$
2. $f(x) = sen\ (4x)$
3. $f(x) = -4sen\ x$
4. $f(x) = 2sen\ (\frac{1}{4}x)$
5. $f(x) = sen\ (\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{4})$

a. 8π
b. $\frac{\pi}{2}$
c. $\frac{\pi}{6}$
d. $\frac{2\pi}{3}$
e. 2π
f. 6π

9. Completar el siguiente cuadro:

Función	Amplitud	Período	Ángulo de fase
$f_1(x) = -2sen(3x - \pi)$			
$f_2(x) = \frac{3}{2}cos(x + \frac{\pi}{5})$			
$f_3(x) = -sen(4x - \pi)$+2			
$f_4(x) = 4sen(2x) - 3$			
$f_5(x) = -\frac{1}{2}cos(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4})$			
$f_6(x) = 2 + cos(-\pi + x)$			

10. Analizar y graficar las siguientes funciones:

a. $f(x) = 2cos\ (2x)$
b. $f(x) = \frac{1}{2}\cos(x - \frac{\pi}{3})$
c. $f(x) = 2sen(\frac{1}{2}x)$
d. $f(x) = \frac{1}{2}senx + 2$
e. $f(x) = tg(2x + \frac{\pi}{2})$
f. $f(x) = 2tg(3x) - 1$

<u>Ecuaciones trigonométricas</u>

Resolver una ecuación trigonométrica es encontrar, si existen, el o los valores angulares que lo verifican.

- **<u>Ejemplo 1:</u>** Hallar $x \in [0; 2\pi)$: $sen\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

<u>Resolución:</u>

$$sen\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$x - \frac{\pi}{3} = arcsen(\frac{1}{2})$$

$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \quad \vee \quad x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$

$x_1 = \frac{\pi}{2} \quad \vee \quad x_2 = \frac{7\pi}{6}$

Solución: $S = \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}\right\}$

- **<u>Ejemplo 2:</u>** Hallar $x \in [0; 2\pi)$: $sen^2x - senx = 1$

<u>Resolución:</u>

$sen^2x - senx - 1 = 0$ (se iguala a cero)

$2z^2 - z - 1 = 0 \rightarrow$ cambio de variable: $senx = z$ *

Se aplica formula resolvente: a=2 b=-1 c=-1

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$z_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.2.(-1)}}{2.2} = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Se reemplaza ambos resultados en *:

$z_1 = senx$

$1 = senx$

$arcsen1 = x$

$x_1 = \frac{\pi}{2}$

$z_2 = senx$

$-\frac{1}{2} = senx$

$arcsen(-\frac{1}{2}) = x$

$x_2 = \frac{7\pi}{6} \quad \vee \quad x_3 = \frac{11\pi}{6}$

Solución: $S = \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$

- **<u>Ejemplo 3:</u>** Hallar $x \in [0; 2\pi)$: $2cos^2x = 1$

<u>Resolución:</u>

$cos^2x = \frac{1}{2}$

$|cosx| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \quad cosx = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \vee \quad cosx = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

1)

$cosx = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x_1 = \frac{\pi}{4} \quad \vee \quad x_2 = \frac{7\pi}{4}$

2)

$cosx = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})$

$x_3 = \frac{3\pi}{4} \quad \vee \quad x_4 = \frac{5\pi}{4}$

Solución: $S = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$

11. Resolver las siguientes ecuaciones, para $\boldsymbol{x} \in [\mathbf{0}; \mathbf{2}\boldsymbol{\pi})$

a. $2cos^2x + 3cosx = -1$

b. $sen^2x + \frac{7}{2}senx = 2$

c. $2cos^2x - senx - 1 = 0$

d. $2tgx.senx = 3$

e. $sen^2x = 4 - 2cos^2x$

f. $2sen(3x) - 1 = 0$

g. $cosx.senx - 2cosx = 0$

h. $sec^2x - 2 = 0$

Unidad 4: Números Irracionales. Radicales. Números Complejos.

Números Irracionales. Radicales

Los números irracionales son aquellos que no pueden ser expresados como el cociente entre dos números enteros y tienen infinitas cifras decimales no periódicas.

Las raíces no exactas de números racionales son números irracionales. Se denomina radical a la raíz indicada de un numero o de una expresión, siempre que esta tenga solución real.

Ejemplos: $\sqrt[5]{2}; \sqrt[3]{5}; \pi; e; \emptyset \ldots\ldots$

La unión del conjunto Q (n° racionales) con el conjunto I (n° irracionales) forman el conjunto R de los n° reales.

Radicales

La expresión $\sqrt[n]{a}$

Se lee raíz enésima de a, y en ella:

- a es el radicando y es un numero racional
- n es el índice y es un numero natural mayor o igual a 2.

Cuando un radical es un numero irracional no lo consideramos una operación por resolver sino la expresión exacta de ese número.

Vamos a estudiar algunos recursos algebraicos que, en determinados casos, nos permitirán reducir expresiones con radicales a otras equivalentes más sencillas.

- **Propiedades de la potenciación:**

• Potencia de exponente cero.	$a^0 = 1 \Leftrightarrow a \neq 0$
• Potencia de exponente negativo.	$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \Leftrightarrow a \neq 0$
• Potencia de otra potencia.	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
• Producto de potencias de igual base.	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
• Cociente de potencias de igual base.	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \Leftrightarrow a \neq 0$
• Distributividad respecto de la multiplicación.	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
• Distributividad respecto de la división.	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \Leftrightarrow b \neq 0$

- **Propiedades de la radicación:**

La radicación se puede expresar como una potencia de exponente fraccionario: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

$\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}$ $\quad \sqrt[3]{6} = 6^{\frac{1}{3}}$ $\quad \sqrt[5]{x^4} = x^{\frac{4}{5}}$ $\quad \sqrt[4]{\frac{1}{x^3}} = x^{-\frac{3}{4}}$

Las propiedades de la radicación son análogas con las de la potenciación.

• Raíz de raíz. $\quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

• Distributividad respecto de la multiplicación. $\quad \sqrt[n]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

• Distributividad respecto de la división. $\quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

• Simplificación de índices. $\quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m:r}{n:r}} = \sqrt[n:r]{a^{m:r}} \Leftrightarrow r \neq 0$

$\sqrt[6]{3^3} = \sqrt{3}$ $\quad \sqrt[12]{16} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[3]{2}$ $\quad \sqrt[15]{125} = \sqrt[15]{5^3} = \sqrt[5]{5}$

• Eliminación del radical. $\quad \sqrt[n]{a^n} = a \Leftrightarrow n$ es impar $\quad \sqrt[n]{a^n} = |a| \Leftrightarrow n$ es par

$\sqrt{36} = \sqrt{6^2} = |6| = 6$ $\quad \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = |2| = 2$ $\quad \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$ $\quad \sqrt[7]{-128} = \sqrt[7]{(-2)^7} = -2$

• Amplificación de índices. $\quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m \cdot p}{n \cdot p}} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} \Leftrightarrow p \neq 0$

$\sqrt{7} = \sqrt[2 \cdot 2]{7^{1 \cdot 2}} = \sqrt[4]{7^2} = \sqrt[4]{49}$ $\quad \sqrt[3]{9} = \sqrt[3 \cdot 3]{3^{2 \cdot 3}} = \sqrt[9]{3^6} = \sqrt[9]{729}$ $\quad \sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3 \cdot 2]{x^{4 \cdot 2}} = \sqrt[6]{x^8}$

Extracción e introducción de factores de un radical

Existen factores, dentro de un radical, que pueden ser extraídos si el exponente de los mismos es mayor o igual que el índice de la raíz. Para ello debemos factorizar los coeficientes numéricos y aplicar las propiedades de la potenciación y radicación.

Regla Práctica: se divide el exponente por el índice de la raíz, el cociente de dicha división representa el exponente al que se eleva el factor externo, y el resto representa el exponente

Ejemplos:

- $\sqrt{8.x^3.y^6} = \sqrt{2^3.x^3.y^6} = \sqrt{2^2}.\sqrt{2}.\sqrt{x^2}.\sqrt{x}.\sqrt{y^6} = 2.\sqrt{2}.x.\sqrt{x}.y^3 = \boxed{2.x.y^3.\sqrt{2.x}}$
- $\sqrt{\frac{150b^4}{a^7}} = \sqrt{\frac{2.3.5^2.b^4}{a^7}} = \frac{\sqrt{2}.\sqrt{3}.\sqrt{5^2}.\sqrt{b^4}}{\sqrt{a^7}} = \frac{\sqrt{2}.\sqrt{3}.5.b^2}{a^3.\sqrt{a}} = \boxed{\frac{5.b^2.\sqrt{6}}{a^3.\sqrt{a}}}$

1. **Extraer factores del radical:**
   a. $\sqrt{75} =$
   b. $\sqrt[3]{40a^5} =$
   c. $\sqrt{0{,}001} =$
   d. $\sqrt[4]{1024.x^6.y^5} =$
   e. $\sqrt{\frac{625.x^4.y^7}{243.z^3}} =$

Operaciones con radicales

- **Radicales semejantes:** dos radicales **son semejantes** cuando tienen **igual índice** y el **mismo radicando.**

  Ejemplo: $2.\sqrt[3]{5}\ y\ 14.\sqrt[3]{5}$

Adición y sustracción de radicales

Solo es posible sumar o restar términos que contienen radicales semejantes.

Ejemplos:

- $4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}.(4 + 2 - 1) = 5\sqrt{3}$
- $3\sqrt[3]{2} - 4\sqrt{2} + \sqrt[3]{2} + 6\sqrt{2} = \sqrt[3]{2}.(3 + 1) + \sqrt{2}.(-4 + 6) = 4\sqrt[3]{2} + 2\sqrt{2}$

Existen casos en los cuales ciertos radicales son semejantes luego de llevarlos a su mínima expresión.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}-4\sqrt{3} + 5\sqrt[8]{81} - 3\sqrt{12} + \sqrt{27} &= -4\sqrt{3} + 5\sqrt[8]{3^4} - 3\sqrt{2^2.3} + \sqrt{3^3}\\ &= -4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 3.2\sqrt{3} + 3.\sqrt{3}\\ &= -4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = \sqrt{3}.(-4 + 5 - 6 + 3) = -2.\sqrt{3}\end{aligned}$$

2. **Resolver en forma exacta:**
   a. $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{250} =$
   b. $6\sqrt{20} + 3\sqrt{80} - 4\sqrt{500} =$
   c. $-\sqrt{5} + 2\sqrt{7} + \sqrt{63} + \sqrt{20} =$
   d. $2.\sqrt{\frac{1}{12}} + 3.\sqrt{\frac{9}{75}} - 2.\sqrt{\frac{1}{48}} =$
   e. $2\sqrt{12} - 2\sqrt{80} + \sqrt{108} =$
   f. $-\sqrt{75} + 4\sqrt{54} + 5\sqrt{3} - 6\sqrt{24} =$

Multiplicación y división de radicales.

Para efectuar cualquier multiplicación o división de radicales, estos deben tener el **mismo índice.** La operatoria con radicales cumple con las siguientes propiedades:

- **Distributiva de la multiplicación y división respecto de la suma y resta.**
  - $\boxed{a.(b \pm c) = (b \pm c).a = a.b \pm a.c}$ **Ejemplo:** $\sqrt{3}.(\sqrt{3} + \sqrt{27}) = \sqrt{3}.\sqrt{3} + \sqrt{3}.\sqrt{27}$ $= \sqrt{9} + \sqrt{81} = 3 + 9 = 12$
  - $\boxed{(b \pm c):a = b:a \pm c:a}$ **Ejemplo:** $(\sqrt{18} - \sqrt{8}):\sqrt{2} = \sqrt{18}:\sqrt{2} - \sqrt{8}:\sqrt{2}$ $= \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1$
- **Cuadrado de binomio y diferencia de cuadrados.**
  - $\boxed{(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2.a.b + b^2}$ **Ejemplo:** $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = \sqrt{2}^2 - 2.\sqrt{2}.\sqrt{3} + \sqrt{3}^2$ $=2 - 2.\sqrt{6} + 3 = 5 - 2\sqrt{6}$
  - $\boxed{(a + b).(a - b) = a^2 - b^2}$ **Ejemplo:** $(\sqrt{7} + \sqrt{5}).(\sqrt{7} - \sqrt{5}) = \sqrt{7}^2 - \sqrt{5}^2$ $=7 - 5 = 2$

Si los radicales tienen distintos índices, se calcula el MCM de los mismos, obteniéndose así el MÍNIMO COMÚN ÍNDICE.

Ejemplo: $\sqrt[3]{a^2}\,.\,\sqrt[6]{x}$ MCI(3;6)=6⇒ $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{(a^2)^2} = \sqrt[6]{a^4}$

Entonces cada radical tiene índice 6 y de esta manera son semejantes, por lo tanto, se resuelve la multiplicación aplicando las propiedades correspondientes.

$\sqrt[3]{a^2}\,.\,\sqrt[6]{x} = \sqrt[6]{a^4}.\sqrt[6]{x} = \sqrt[6]{a^4.x}$

3. Resolver:

a. $-3\sqrt{3}.(\sqrt{5} + 4\sqrt{11}) =$
b. $(-2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})^2 =$
c. $(\sqrt{x^3.y} + \sqrt{x.y^5}):\sqrt{3.x.y} =$
d. $\sqrt[3]{2x}.\sqrt{9x^3} =$
e. $\sqrt[3]{4.a^2.b}.\sqrt[5]{2^3.a^3.b^4} =$
f. $\sqrt{5.a.b}:\sqrt[5]{10.a^2.b^3} =$
g. $\sqrt{7x}:\sqrt[8]{49.x.z^2} =$
h. $(\sqrt{2} + \sqrt{3}).(\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \sqrt{6}.(\sqrt{216} - \sqrt{6}) =$
i. $\sqrt{7}.\sqrt{21} - (2\sqrt{15} + 3\sqrt{45}):\sqrt{5} =$
j. $\sqrt{3}.(-\sqrt{24} + \sqrt{6}) + \sqrt{98} =$
k. $(5\sqrt{5} - 8\sqrt{20})^2 - \sqrt[4]{25^2} =$

Potencia de exponente racional

Para cualquier numero natural n mayor que 1 y “a” mayor o igual que cero, se cumple que:

$$\boldsymbol{a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}}$$

Las potencias de exponente racional cumplen las mismas propiedades que las potencias de exponente entero.

Para operar, en algunos casos, conviene expresar los radicales como potencias y trabajar con éstas aplicando sus propiedades.

Ejemplo: $\sqrt{5}.\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{2}}.5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 5^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{5^5}$

4. **Escribir como potencias de exponente fraccionario y resolver:**

a. $\frac{\sqrt{2}.\sqrt[3]{2}}{\sqrt[5]{2}} =$

b. $\frac{\sqrt[3]{5^2}.\sqrt[4]{5}.\sqrt{5}}{\sqrt[5]{5^3}.\sqrt[5]{5^2}} =$

c. $\frac{\sqrt{4x}.\sqrt[3]{x^2}.\sqrt[6]{2.x^3}}{\sqrt[3]{27.x^2}} =$

d. $\frac{\sqrt[5]{m^2}.\sqrt{m^5}:m}{\sqrt[4]{m^3}.\sqrt{m}} =$

<u>Racionalización de denominadores</u>

Racionalizar el denominador de una fracción es transformarlo en un numero racional; por lo tanto, siempre que en el mismo aparezcan radicales irracionales, se debe hallar una fracción equivalente a la dada con denominador racional.

Estas son algunas formas de racionalizar denominadores:

- **<u>Caso 1</u>**: En el denominador hay un único radical con índice igual a 2.
Para racionalizar este tipo de expresiones, se debe amplificar por la misma raíz que tiene el denominador.

<u>Ejemplo</u>: $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2.\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

- **<u>Caso 2</u>**: en el denominador hay un único radical con índice mayor a 2.
Para racionalizar este tipo de expresiones, se debe amplificar por una raíz que tenga el mismo índice que la raíz del denominador, cuyo radicando tenga los mismos factores, pero con exponente igual a la diferencia entre el índice y el exponente dado.

<u>Ejemplo:</u> $\frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt[5]{\boldsymbol{a^2.b}}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt[5]{\boldsymbol{a^2.b}}}.\frac{\sqrt[5]{\boldsymbol{a^3.b^4}}}{\sqrt[5]{\boldsymbol{a^3.b^4}}} = \frac{\boldsymbol{a}.\sqrt[5]{\boldsymbol{a^3.b^4}}}{\sqrt[5]{\boldsymbol{a^5.b^5}}} = \frac{\boldsymbol{a}.\sqrt[5]{\boldsymbol{a^3.b^4}}}{\boldsymbol{a.b}} = \frac{\sqrt[5]{\boldsymbol{a^3.b^4}}}{\boldsymbol{b}}$

- **<u>Caso 3:</u>** el denominador es una suma o resta de uno o dos radicales de índice 2.
Para racionalizar este tipo de expresiones, se debe aplicar el producto de una suma de dos términos por su diferencia.

$$(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$$

<u>Ejemplo:</u>

$$\frac{-3}{\sqrt{2}+3} = \frac{-3}{\sqrt{2}+3}.\frac{(\sqrt{2}-3)}{\sqrt{2}-3} = \frac{-3.(\sqrt{2}-3)}{(\sqrt{2}+3).(\sqrt{2}-3)} = \frac{-3.(\sqrt{2}-3)}{\sqrt{2}^2-3^2} = \frac{-3.(\sqrt{2}-3)}{2-9} = \frac{-3.(\sqrt{2}-3)}{-7} = \frac{3}{7}.(\sqrt{2}-3)$$

5. **Racionalizar los denominadores:**

a. $\frac{3.\sqrt{6}}{\sqrt{5}} =$

b. $\frac{2x}{3\sqrt{x}} =$

c. $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt[4]{5}} =$

d. $\frac{1-\sqrt{8}}{2\sqrt{8}} =$

e. $\frac{12}{\sqrt[5]{3.a^2.b^3}} =$

f. $\frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} =$

g. $\frac{\sqrt{8}-6}{7-\sqrt{8}} =$

h. $\frac{\sqrt{12}-\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{12}} =$

i. $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-4} =$

j. $\frac{-\sqrt{7}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} =$

Ecuaciones con radicales

Las ecuaciones con radicales o ecuaciones irracionales son aquellas que tienen la incógnita bajo el signo radical. **Por ejemplo:**

$$\sqrt{2x-3}-x=-1$$

Resolución:

1°: se despeja un radical en uno de los dos miembros, pasando al otro miembro el resto de los términos, aunque tengan también radicales:

$$\sqrt{2x-3}=-1+x$$

2°: se elevan al cuadrado ambos miembros:

$$\left(\sqrt{2x-3}\right)^2=(-1+x)^2$$

3°: se resuelven ambos términos: $2x-3=(-1)^2-2.1.x+x^2$

4°: se iguala a cero y se aplica la formula resolvente para buscar las soluciones reales:

$$0=1-2x+x^2-2x+3$$

$$0=x^2-4x+4$$

a=1 b=-4 c=4 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{4\pm0}{2}=2$ (solución doble)

5°: verificar la solución en la ecuación original:

$$\sqrt{2.2-3}-2=-1$$

$$1-2=-1$$

$$-1=-1$$

La ecuación tiene por solución: x=2

6. **Hallar el valor de x:**

a. $\sqrt{8-x^2}=x$

b. $\sqrt{2}.\left(x-\sqrt{3}\right)+5\sqrt{6}=-\frac{\sqrt{6}}{2}$

c. $\sqrt{x}+\sqrt{x-4}=2$

d. $x-\sqrt{2x-1}-1=x$

e. $\sqrt[3]{4x+1}+5=10$

f. $x=\sqrt[3]{11x^3-28}$

g. $2x=\sqrt{-13x-10}$

h. $\frac{1}{5}x=\sqrt{x-6}$

Números Complejos

La radicación de base negativa e índice par no tiene solución en el conjunto de los números reales($\sqrt{-4}$; $\sqrt[6]{-25}$; etc ...), ya que no existe ningún número real elevado a una potencia par dé por resultado un numero negativo.

Se define entonces un nuevo número, llamado i, cuyo cuadrado es igual a -1: $i^2 = -1$
Dicho número es la unidad imaginaria en el conjunto de los números complejos

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a \begin{cases} i^2 = -1 \Leftrightarrow \sqrt{-1} = i \\ (-i)^2 = 1.i^2 = 1.(-1) = -1 \Leftrightarrow \sqrt{-1} = -i \end{cases} \qquad i = \pm\sqrt{-1}$$

Ejemplo: $\sqrt{-4} = \pm i.\sqrt{4} = \pm 2i$ $\qquad$ $\sqrt{-3} = \pm i.\sqrt{3} = \pm\sqrt{3}i$

Llamamos Número Complejo a un número z que puede escribirse de la forma: $\boxed{z = a + b.i}$
Donde a y b son números reales e $i = \sqrt{-1}$

Características

Al número **a** se lo define como **Parte Real** del número complejo y lo simbolizamos como: **a=Re(z);** y al número **b** se lo define como **Parte Imaginaria** del número complejo y se lo simboliza como: **b=Im(z).**

C es el conjunto de los números complejos y se lo define como:

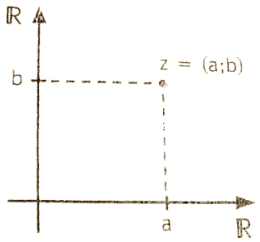
$$\boldsymbol{C = \{a + b.i / a \in R \wedge b \in R\}}$$

La forma de expresión z=a+b.i se llama **Forma Binómica**

Representación gráfica y expresión cartesiana de un complejo.

Cada número complejo involucra dos números reales: a=Re(z) y b=Im(z). para representarlo necesitamos entonces dos coordenadas, es decir, se representa en un sistema de jes cartesianos.
Sobre el **eje x**, se ubica la **Parte Real** del número complejo; y sobre el **eje y** la **Parte Imaginaria**.

A cada número complejo le corresponde un punto en el plano: **Z=(a;b).** esta forma de expresión se llama **Forma Cartesiana o Par Ordenado.**



Todos los números de la forma (a;0) son **números reales** y los de la forma (0;b) son números **imaginarios puros.**
Un número real es un n° complejo cuya segunda componente es igual a cero: k=(0;1)
El **número imaginario** de segunda componente igual a 1 es la unidad imaginaria: i=(0;1)

7. **Unir con una flecha cada número complejo con su expresión Binómica.**

1) (-1;1)	a. –i
2) (-1;0)	b. 1+i
3) (1;-1)	c. -1-i
4) (1;1)	d. -1
5) (0;-1)	e. 1-i
	f. -1+i

8. **Indicar Re(z) e Im(z) para cada n° complejo:**

a. $z_1 = 2 + 3i$
b. $z_2 = 5i$
c. $z_3 = -i + 4$
d. $z_4 = \frac{3}{2}$

9. **Representar en un mismo sistema cartesiano los siguientes n° complejos**

a. $z_1 = i$
b. $z_2 = (5; 0)$
c. $z_3 = -3 + 5i$
d. $z_4 = (0; -4)$
e. $z_5 = -1 - 2i$
f. $z_6 = 8i + 6$

<u>Complejos Opuestos</u>

Dos n° complejos son opuestos cuando **sus partes reales e imaginarias son n° opuestos entre si.**

<u>Ejemplo:</u> Si $z_1 = -2 + 7i$ entonces su opuesto es: $-z_1 = 2 - 7i$

<u>Complejos conjugados</u>

Dos n° complejos son conjugados si tienen la **misma parte real** y la **parte imaginaria opuesta**.

<u>Ejemplo:</u> Si $z_1 = -2 + 7i$ entonces su conjugado es: $\overline{z_1} = -2 - 7i$

<u>Operaciones con n° complejos</u>

- **<u>Suma y Resta</u>**: para sumar o restar dos o más n° complejos, se debe sumar/restar por un lado las partes reales, y por otro lado las partes imaginarias.

<u>En símbolos</u>: Dados: $z = a + b.i \quad y \quad w = c + d.i$ se define como:

- $z + w = (a + c) + (b + d).i$
- $z - w = (a - c) + (b - d).i$

<u>Ejemplos</u>: Dados $z_1 = -3 + 5i$ y $z_2 = -1 - 2i$ Calcular:

- $z_1 + z_2 = (-3 - 1) + (5 - 2).i = -4 + 3i$
- $z_1 - z_2 = (-3 + 1) + (5 + 2).i = -2 + 7i$

Si están expresados como **pares ordenados,** se suman o restan las componentes reales e imaginarias, respectivamente.

<u>Ejemplos:</u> Dados $z_1 = (-4; 3)$ y $z_2 = (-2; -5)$ Calcular:

- $z_1 + z_2 = (-4 - 2; 3 - 5) = (-6; -2)$
- $z_1 - z_2 = (-4 + 2; 3 + 5) = (-2; 8)$

10. **Resolver las siguientes sumas algebraicas en la forma expresada:**

a. $(3 - i) - (4 + 3i) + (1 - 2i) =$
b. $\left(\frac{1}{2} + 2i\right) + \left(-\frac{1}{3} + 4i\right) - \left(\frac{1}{2} - i\right) =$
c. $\left(-\frac{1}{5}i + 2\right) - \left(\frac{1}{2} + 4i\right) - (3 + i) =$
d. $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right) + \left(-1; \frac{5}{3}\right) + \left(\frac{3}{2}; 0\right) =$
e. $(1{,}2; \sqrt{5}) + (0{,}6; 2\sqrt{5}) + \left(-3; -\frac{1}{2}\sqrt{5}\right) =$

- **Multiplicación de n° complejos**

Para multiplicar dos n° complejos en Forma Binómica, se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma o resta.

Ejemplo: : Dados $z_1 = -3 + 5i$ y $z_2 = -1 - 2i$ Calcular:

$$z_1 . z_2 = (-3 + 5i).(-1 - 2i) = -3.(-1) - 3.(-2i) + 5i.(-1) + 5i.(-2i)$$

$$= 3 + 6i - 5i - 10i^2 = 3 + i - 10.(-1) = \boxed{13 + i}$$

- **División de n° complejos**

Para dividir dos n° complejos en Forma Binómica, se multiplica al dividendo y divisor por el conjugado del divisor, y luego se resuelven las operaciones resultantes.

Ejemplo: Dados $z_1 = -3 + 5i$ y $z_2 = -1 - 2i$ Calcular:

$$z_1 : z_2 = \frac{-3 + 5i}{-1 - 2i} = \frac{(-3 + 5i)}{(-1 - 2i)} . \frac{(-1 + 2i)}{(-1 + 2i)} = \frac{-3.(-1) - 3.2i + 5i.(-1) + 5i.2i}{(-1)^2 - (2i)^2} = \frac{3 - 6i - 5i + 10i^2}{1 - 4i^2}$$

$$= \frac{3 - 11i + 10.(-1)}{1 - 4.(-1)} = \frac{3 - 11i - 10}{1 + 4} = \boxed{\frac{-7 - 11i}{5}}$$

11. Resolver:

a. $(4 + 6i).(-2 + 3i) =$

b. $(1 + 3i).\left(\frac{1}{2} - 14i\right) =$

c. $\left(\sqrt{3} + i\right).\left(2\sqrt{3} + 4i\right) =$

d. $(5 + i) - 4i.(3 + 11i) =$

e. $\left(\frac{2}{5} - 3i\right).(5 + i) - 3.(-i + 7) =$

f. $\overline{(2 - 6\imath).(2 + \frac{1}{3}\imath)} - 4i =$

g. $\overline{-7\imath + 1}.(2 + 2i).\overline{4\imath} =$

h. $\frac{2+i}{3-2i} =$

i. $\frac{5-i}{-1-3i} =$

j. $\frac{(6+2i).(5+3i)}{2+2i} =$

- **Potencias de la unidad imaginaria**

Aplicando las propiedades de la potenciación en R, se puede hallar la potencia enésima de la unidad imaginaria i.

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2.i = -1.i = -i$

$i^4 = i^2.i^2 = (-1).(-1) = 1$

$i^5 = i^4.i = 1.i = i$

$i^6 = i^5.i = i.i = i^2 = -1$

$i^7 = i^6.i = -1.i = -i$

Y así sucesivamente se observa que los resultados de las potencias de i son: 1, i, -1, -i, y se repiten periódicamente.

$$\boxed{\begin{array}{c} i^0 = 1 \\ i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \end{array}}$$

Conclusión: el resultado de elevar la unidad imaginaria a un n° natural n, es igual al elevarlo al resto de la división entera entre n y 4.

Ejemplo: Calcular i^{85}
Realizamos la división entera: 85 ⌊ 4

1/ 21

Por lo tanto: $i^{85} = i^1 = i$

- **Cuadrado y cubo de un n° complejo**

Para elevar al cuadrado o cubo a un n° complejo, se desarrolla el cuadrado o cubo de un binomio.

Ejemplos:

- $(3+2i)^2 = 3^2 + 2.3.2i + (2i)^2 = 9 + 12i + 4i^2 = 5 + 12i$
- $(2+i)^3 = 2^3 + 3.2^2.i + 3.2.i^2 + i^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i$

12. Calcular:

a. $i^{122} =$
b. $i^{523} =$
c. $i^{116} =$
d. $i^{218} =$

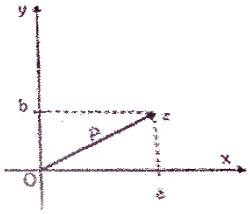
13. Resolver:

a. $-3i + \frac{1}{2}i^5 + i^3 =$
b. $\frac{1}{2} + i^3 + 2 + i^7 =$
c. $\frac{3}{2} + i^{17} + \frac{1}{3} + i^{23} =$
d. $(4+3i)^2 =$
e. $(2-6i)^3 =$
f. $\frac{i^{12}+2i^{21}}{i^5.i^{13}} =$

Módulo de un n° complejo

A cada n° complejo z=(a;b) le está asociado un vector $\vec{v}$, con origen en el origen de coordenadas, y extremo en el punto (a;b). de este modo se puede hacer corresponder un vector a cada n° complejo.
El módulo de ese vector, es el Modulo del Complejo,, y se representa con la letra ρ

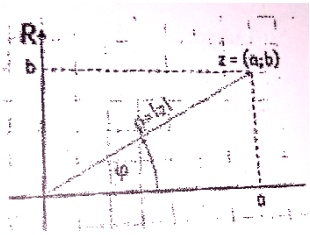
En símbolos: $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$



Ejemplo: $z = 3 + 4i \quad \Rightarrow \rho = |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

Forma Polar de un n° complejo

Al ángulo que forma el módulo de un n° complejo sobre el eje de abscisas o Real, se llama argumento y se lo simboliza con la letra griega φ
Para calcular φ se aplica la función tangente:



$tg\hat{\varphi} = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \hat{\varphi} = arctg\frac{b}{a}$

Por lo tanto a la expresión $\boxed{z = (\rho; \varphi)}$ se la llama **Forma Polar**

Ejemplo: dado $z = 4 + i$, expresarlo en F. Polar:
Resolución:

- calculamos ρ: $\rho = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$
- calculamos φ: $\hat{\varphi} = arctg\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \hat{\varphi} = acrtg\frac{1}{4} = 14°2'10"$

Por lo tanto la Forma Polar es: $z = (\sqrt{17}; 14°2'10")$

Recordatorio: Si el n° complejo se encuentra:

- En el 2do cuadrante, el argumento φ se obtiene restando a 180° el valor obtenido.
- En el 3er cuadrante, el argumento φ se obtiene sumándole 180° al valor obtenido.
- En el 4to cuadrante, debemos restar a 360° el valor obtenido.

14. Hallar el módulo y el conjugado de cada uno de los siguientes n° complejos:

a. $z_1 = 12 + 5i$

b. $z_2 = 3 - i$

c. $z_3 = -4 - 2i$

15. Expresar en Forma Polar:

a. $z_1 = 1 + i$

b. $z_2 = (-1; -3)$

c. $z_3 = \frac{1}{2} - 2i$

d. $z_4 = (3; -5)$

Forma Trigonométrica de un n° complejo

Sea $z = a + b.i$

Como $\begin{cases} cos\hat{\varphi} = \frac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho.cos\hat{\varphi} \\ sen\hat{\varphi} = \frac{b}{\rho} \Rightarrow b = \rho, sen\hat{\varphi} \end{cases}$

Reemplazando en la Forma Binómica, resulta:

$$z = \rho.cos\hat{\varphi} + \rho.sen\hat{\varphi}.i$$

$$\boxed{z = \rho.(cos\hat{\varphi} + sen\hat{\varphi}.i)}$$

16. Expresar en Forma Trigonométrica:

a. $z_1 = 2 + 2i$

b. $z_2 = 3$

c. $z_3 = -5 + 5i$

d. $z_4 = 1 - i$

17. Expresar en Forma Binómica:

a. $z_1 = 2.(cos60° + i.sen60°)$

b. $z_2 = 4.(cos315° + i.sen315°)$

c. $z_3 = (4; 180°)$

d. $z_4 = 3.(cos120° + i.sen120°)$

e. $z_5 = (\frac{1}{2}; 30°)$

Ecuaciones reales con solución compleja

Existen ecuaciones con coeficientes reales cuya solución es la raíz de índice par de un número negativo. Dichas ecuaciones no tienen solución en el conjunto de los n° Reales, pero si en el conjunto de los n° complejos.

Las soluciones complejas de una ecuación son complejos conjugados.

Ejemplos:

- $x^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow x^2 = -1 \quad \Rightarrow |x| = \sqrt{-1} \quad \Rightarrow x = \pm i$
- $x^2 - 2x + 5 = 0$

  Aplicamos F. Resolvente: $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + 2i \\ x_2 = 1 - 2i \end{cases}$

Ecuaciones con n° complejos

Las ecuaciones con n° complejos deben resolverse aplicando las operaciones y propiedades de los mismos.

Ejemplos:

- $\mathrm{z} - 3\mathrm{i} + 2 = 1 - \mathrm{i}$

  $\mathrm{z} = 1 - \mathrm{i} + 3\mathrm{i} - 2$

  $\boxed{\mathrm{z} = -1 + 2\mathrm{i}}$
- $2\mathrm{z} - 5\mathrm{i} + \mathrm{zi} = 1$

  $2\mathrm{z} + \mathrm{zi} = 1 + 5\mathrm{i}$

  $\mathrm{z}.(2 + \mathrm{i}) = 1 + 5\mathrm{i}$

  $z = \frac{1+5i}{2+i}$ se resuelve la división

  $\boxed{z = \frac{7}{5} + \frac{9}{5}i}$

18. Resolver las ecuaciones:

a. $x^2 + 2x + 2 = 0$

b. $z + i = 4 + zi + 3i$

c. $2z - 3i + 1 = zi - 2$

d. $z^2 + 3iz + 4 = 0$

e. $z.\sqrt{3} = z.i - (\sqrt{3} - i)$

Unidad 5: Función Exponencial y Logarítmica

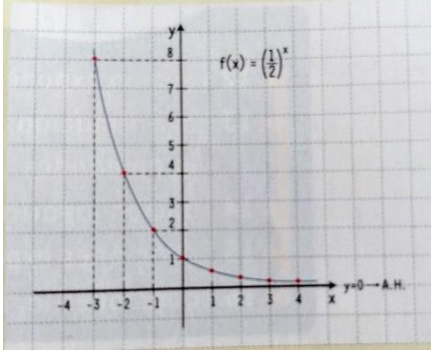
Función Exponencial

Se denomina función exponencial a toda función de la forma:

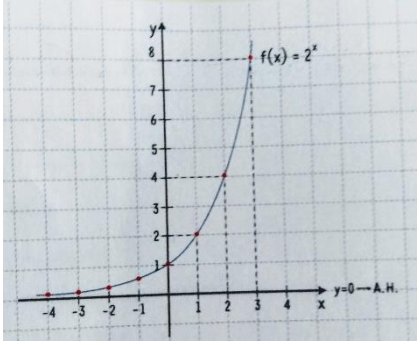
$$f: R \to R / f(x) = k.a^{x-b} + c \ \wedge a > 0 \ \wedge \ a \neq 1 \wedge \mathrm{k} \in \mathrm{R} - \{0\}$$

- **Funciones de la forma:** $f(x) = a^x$

a. $0 < a < 1$



b. $a > 1$



Características comunes:

- No tienen raíces.
- Su ordenada al origen es: (0;1)
- El Conj. Imagen es: $Img = (0; +\infty) = R^+$
- Cuando x aumenta (tiende al ∞), la curva se aproxima al eje de abscisas, pero nunca llega a tocarlo. Por eso la recta de ecuación y=0 es la **Asíntota Horizontal.**

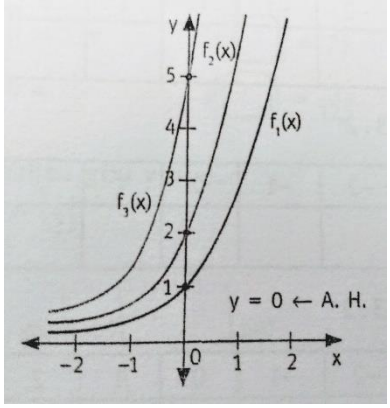
Diferencias:

- Si a>1, la función es creciente
- Si 0<a<1, la función es decreciente

- **Funciones de la forma:** $f(x) = k.a^x \wedge \mathrm{k} \in \mathrm{R} - \{0\}$

Ejemplo:

$f(x) = k.a^x$	**K**
$f(x) = 2^x$	1
$f(x) = 3.2^x$	3
$f(x) = 5.2^x$	5



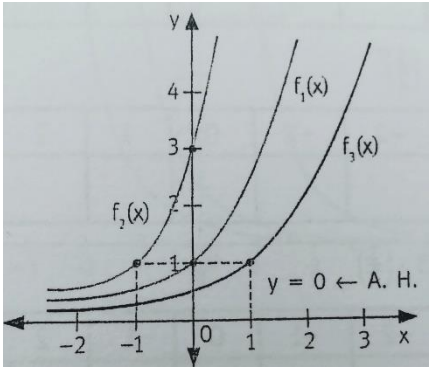
- **Características comunes:**
- No tienen raíces.
- El Conj. Imagen es: $Img = (0; +\infty) = R^+$, cuando k>0. Cuando k<0 el Conj. Imagen es: $Img = (-\infty; 0) = R^-$.
- Son funciones crecientes, porque a>0.

- Tienen Asíntota Horizontal: y=0
- **<u>Diferencia:</u>** La ordenada al origen varía según el valor de k. Por lo tanto **k modifica el valor de la ordenada al origen** de la función $f(x) = a^x$

- **<u>Funciones de la forma:</u>** $f(x) = k.a^{x-b}$

<u>Ejemplo:</u>

$f(x) = a^{x-b}$	**b**	**Corrimiento**
$f(x)_1 = 3^x$	0	No hay
$f(x)_2 = 3^{x+1}$	-1	1 unidad hacia la izquierda
$f(x)_3 = 3^{x-1}$	1	1 unidad hacia la derecha



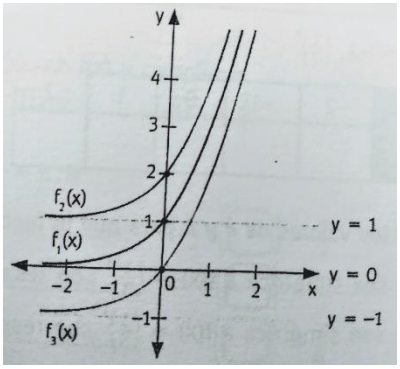
- **<u>Características comunes:</u>**
- No tienen raíces.
- El Conj. Imagen es: $Img = (0; +\infty) = R^+$, cuando k>0. Cuando k<0 el Conj. Imagen es: $Img = (-\infty; 0) = R^-$.
- Son funciones crecientes, porque a>0.
- Tienen Asíntota Horizontal: y=0

- **<u>Diferencias</u>**:
- Las funciones $f(x)_2$ y $f(x)_3$ se desplazaron respecto de $f(x)_1$ horizontalmente:
  - b unidades a la derecha si b>0
  - b unidades a la izquierda si b<0
- **El desplazamiento horizontal modifica la ordenada al origen de la función.**

- **<u>Funciones de la forma:</u>** $f(x) = a^x + c \quad c \in R$

<u>Ejemplo:</u>

$f(x) = a^x + c$	**c**	**Corrimiento**	**A.H**
$f(x)_1 = 3^x$	0	No tiene	Y=0
$f(x)_2 = 3^x + 1$	1	1 unidad hacia arriba	Y=1
$f(x)_3 = 3^x - 1$	-1	1 unidad hacia abajo	Y=-1



- **<u>Características comunes:</u>**
- Son funciones crecientes, porque a>0.

- **<u>Diferencias:</u>**
- La función $f(x)_3$ tiene raíz en x=0.
- Las ordenadas al origen cambian según el valor de c: (0;1+c)
- El conjunto Imagen
- La Asíntota Horizontal: y=c es A.H.

Por lo tanto, el coeficiente **c desplaza verticalmente** hacia arriba a la función si c>o; y verticalmente hacia abajo si c<0.

1. **Unir con flecha cada función con la asíntota horizontal correspondiente.**

1) $f(x) = 4^{x+3}$	a. Y=-4
2) $f(x) = 2^x - 4$	b. Y=-3
3) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3$	c. Y=0
4) $f(x) = -3 - 2^{x-3}$	d. Y=1
5) $f(x) = 5.2^x + 4$	e. Y=4
	f. Y=3

2. **Hacer una tabla de valores y graficar las funciones. Luego analizar: Dom, Img, Raiz, Ordenada al origen, Crec/Decrec, A.H.**

   a. $f(x) = 2^x + 2$

   b. $f(x) = 2.\left(\frac{1}{4}\right)^x$

   c. $f(x) = 5^{x-1}$

   d. $f(x) = -4^x + 1$

<u>Logaritmos</u>

La logaritmación es una operación entre dos números reales a y b, llamados base y argumento, respectivamente, que se define como:

$$\boxed{\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b \wedge a > 0 \wedge a \neq 1 \wedge b > 0}$$

<u>Ejemplo:</u> $\log_2 16 = 4 \Leftrightarrow 2^4 = 16$

Existen dos logaritmos cuya notación es especial:

- El decimal (base 10), que se simboliza $\log_{10} b = \log b$
- El natural o neperiano (base e$\cong 2.71$) que se simboliza $\log_e b = \ln b$

Propiedades de los logaritmos

1. $\log_a 1 = 0 \;\Leftrightarrow a^0 = 1$ Ejemplo: $\log_3 1 = 0 \;\Leftrightarrow 3^0 = 1$
2. $\log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$ Ejemplo: $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1 \;\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$
3. $\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y \quad \wedge x > 0 \;\; \wedge x > 0$

   Ejemplo: $\log_5(5.25) = \log_5 5 + \log_5 25 = 1 + 2 = 3$
4. $\log_a(x:y) = \log_a x - \log_a y \quad \wedge x > 0 \;\; \wedge x > 0$

   Ejemplo: $\log_5(25:5) = \log_5 25 - \log_5 5 = 2 - 1 = 1$
5. $\log_a b^n = n.\log_a b$ Ejemplo: $\log_6 216^4 = 4.\log_6 216 = 4.3 = 12$

Para calcular logaritmos en los cuales el argumento no es una potencia de la base, se debe recurrir a un cambio de base, utilizando los logaritmos con bases convenientes o logaritmos decimales o neperianos, los cuales pueden resolverse con calculadora.

6. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\ln b}{\ln a}$

   Ejemplo: $\log_{16} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 16} = \frac{\log 8}{\log 16} = \frac{\ln 8}{\ln 16}$

1. Calcular aplicando la definición:

a. $\log_3 27 =$

b. $\log_7 49 =$

c. $\log_2 \frac{1}{16} =$

d. $\log_5 0{,}04 =$

e. $\log_{\frac{3}{2}} \frac{8}{27} =$

f. $\log_e 1 =$

g. $\ln e =$

h. $\ln \frac{1}{e} =$

2. Resolver aplicando propiedades:

a. $\log_3\left(27.\sqrt{3}\right) =$

b. $ln\left(e^3.\sqrt{e}\right) =$

c. $\log_2\left(8:\sqrt{2}\right) =$

d. $\log_3\left(\frac{\sqrt[3]{3}.27}{81}\right) =$

3. Resolver, aplicando las propiedades (sin calculadora):

a. $\log_{45} 5 + 2.\log_{45} 3 =$

b. $2.\log 4 + 2.\log 5 - \frac{1}{2}.\log 16 =$

c. $\log_{\frac{1}{2}} 20 - \frac{1}{3}.\log_{\frac{1}{2}} 125 =$

d. $\log_3 5 . \log_5 3 =$

e. $\log_{\frac{3}{5}}\left(\frac{4}{9}\right).\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{25}{9}\right) =$

Función Logarítmica

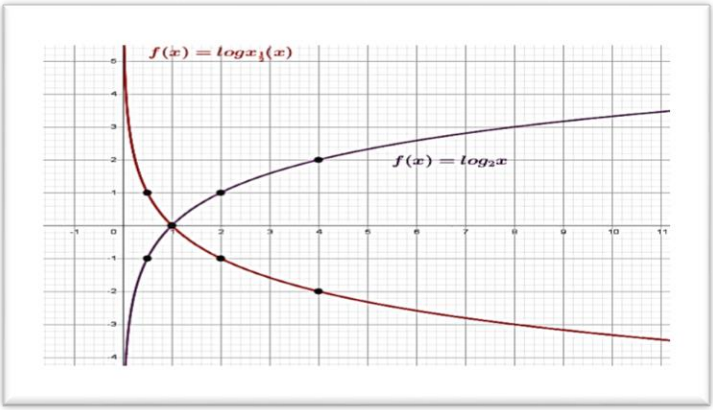
Se define como función logarítmica de base a, a la función inversa de la función exponencial de base a.

En símbolos: $f: R^{+} \rightarrow R / f(x) = y = \log_a x \quad \Leftrightarrow a^y = x \quad \wedge x > 0 \quad \wedge a > 0 \quad \wedge a \neq 1$

- **Variación de a en la función:** $y = \log_a x$

  Ejemplo:

X	$f_1(x) = \log_2 x$	$f_2(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$
$\frac{1}{2}$	-1	1
1	0	0
2	1	-1
4	2	-2

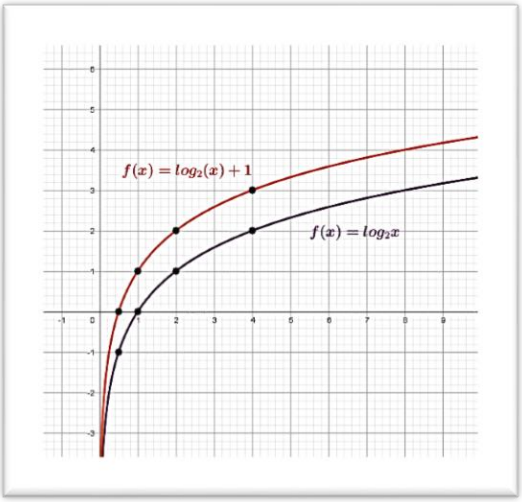


- **Características comunes:**
- Dominio: R^{+}
- Tienen raíz en: (1;0)
- No cortan al eje de ordenadas.
- Conj. Imagen: $Img = R$
- Tienen una **Asíntota Vertical** en x=0, es decir, el eje de ordenadas.
- **Diferencias:**
- Si a>1, entonces la función **es creciente.**
- Si 0<a<1, entonces la función **es decreciente.**
- Las curvas correspondientes a funciones de bases reciprocas son **simétricas respecto al eje x.**

- **<u>Funciones de la forma:</u>** $f(x) = \log_a x + c$

<u>Ejemplo:</u>

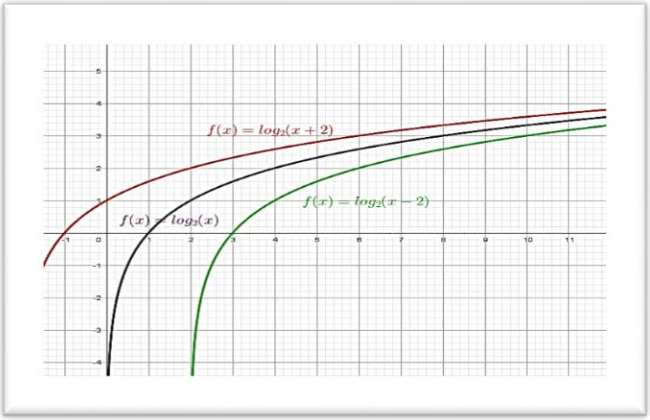
X	$f_1(x) = \log_2 x$	$f_2(x) = \log_2 x + 1$
$\frac{1}{2}$	-1	0
1	0	1
2	1	2
4	2	3



- **<u>Características comunes:</u>**
- Dominio: R^+
- Conj. Imagen: R
- Asíntota vertical: x=0
- Son funciones crecientes (a>1)
- **<u>Diferencias:</u>** El valor **c desplaza verticalmente** a la función $f(x) = \log_a x$:
- **c unidades hacia arriba**, si c>0
- **c unidades hacia abajo**, si c<0
- Raíz de la función: en $f_1(x)$ es (1;0) y en $f_2(x)$ es $(\frac{1}{2}; 0)$

- **<u>Funciones de la forma:</u>** $f(x) = \log_a(x - k)$

<u>Ejemplo:</u>



x	$f_1(x) = \log_2 x$	$f_2(x) = \log_2(x + 2)$	$f_3(x) = \log_2(x - 2)$
-1	∄	0	∄
0	∄	1	∄
1	0	1,6	∄
2	1	2	∄
3	1,6	2,3	0
4	2	2,6	1
6	2,6	3	2

- **<u>Características comunes:</u>**
- Conj. Imagen: $Img = R$
- Son funciones crecientes (a>1)
- **<u>Diferencias</u>**:
- Dominio: $\begin{cases} en\ f_1(x): R^+ \\ en f_2(x): (-2; +\infty) \\ en f_3(x): (2; +\infty) \end{cases}$
- Raíz de la función: $\begin{cases} en\ f_1(x): \nexists \\ en f_2(x): (-1; 0) \\ en f_3(x): (3; 0) \end{cases}$
- Asíntota Vertical: $\begin{cases} en\ f_1(x): x = 0 \\ en f_2(x): x = -2 \\ en f_3(x): x = 2 \end{cases}$

Por lo tanto el factor **k desplaza horizontalmente** a la función $f(x) = \log_a x$:

- Si k>0, la desplaza **k** unidades **hacia la derecha**
- Si k<0, la desplaza **k** unidades **hacia la izquierda**.

4. Realizar una tabla de valores, graficar y analizar las siguientes funciones:

a. $f(x) = 2.\log_2(x-1)$

b. $f(x) = 1 - \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{2}\right)$

c. $f(x) = \ln x + 2$

d. $f(x) = -2.\log_4 x$

e. $f(x) = \log_6(x+3) - 2$

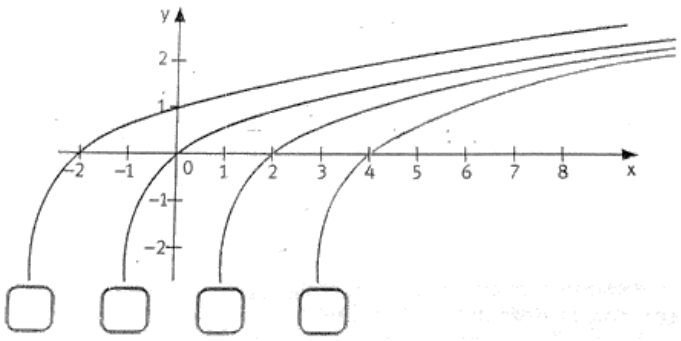
5. Completar escribiendo la función correspondiente:

a. $f(x) = \log_3 (x + 1)$

b. $g(x) = \log_3 (x - 1)$

c. $h(x) = \log_3 (x + 3)$

d. $i(x) = \log_3 (x - 3)$



6. Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, completar:

D_f: _____; C_f: _____; Raíz de f: _____; f(0) = ____; A. V.: _____; C_f^+: _____; C_f^-: _____

D_g: _____; C_g: _____; Raíz de g: _____; g(0) = ____; A. V.: _____; C_g^+: _____; C_g^-: _____

D_h: _____; C_h: _____; Raíz de h: _____; h(0) = ____; A. V.: _____; C_h^+: _____; C_h^-: _____

D_i: _____; C_i: _____; Raíz de i: _____; i(0) = ____; A. V.: _____; C_i^+: _____; C_i^-: _____

Ecuaciones exponenciales

Una ecuación exponencial es aquella en la que la incógnita aparece en el exponente. Para resolver una ecuación exponencial, hay que tener en cuenta:

- $a^x \Rightarrow a > 0 \ \wedge a \neq 1$
- $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$
- Las propiedades de las potencias.

- **Caso 1:** reducción a potencias de igual base.

Ejemplo: $2^{x+3} = 32$

$2^{x+3} = 2^5$ (como las bases son iguales, se cancelan e igualan los exponentes)

$x + 3 = 5$

$x = 2$

- **Caso 2:** potencias de bases distintas.

Ejemplo: $2^x = 5$

$\log 2^x = \log 5$ (se aplica logaritmo a ambos miembros)

$x.\log 2 = \log 5$ (se aplica la propiedad 5 de los logaritmos)

$x = \frac{\log 5}{\log 2} \cong 2{,}32$

- **Caso 3**: suma y resta de potencias de igual base.

Ejemplo: $2^x + 2^{x+1} - 2^{x-3} = 23$

$2^x + 2^x.2^1 - 2^x.2^{-3} = 23$ (se aplica la propiedad $a^{b+c} = a^b.a^c$)

$2^x.(1 + 2 - \frac{1}{8}) = 23$ (extraemos factor común 2^x)

$\frac{23}{8}.2^x = 23$

$2^x = 23:\frac{23}{8}$

$2^x = 8$

$2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$

- **Caso 4:** cambio de variable.

Ejemplo: $3^{2x} - 6.3^x + 5 = 0$

$(3^x)^2 - 6.3^x + 5 = 0$

Realizamos un cambio de variable: z=3^x

$z^2 - 6.z + 5 = 0$

Aplicamos la formula resolvente para resolver la ecuación:

a=1 b=-6 c=5

$$z_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4.1.5}}{2.1}$$

$$z_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} z_1 = 5 \\ z_2 = 1 \end{cases}$$

Por último, se reemplazan los valores de z en el cambio de variable:

$z_1 = 3^x$

$5 = 3^x$

$\log 5 = \log 3^x$

$x = \frac{\log 5}{\log 3} \cong 1{,}5$

$z_2 = 3^x$

$1 = 3^x$

$3^0 = 3^x$

$x = 0$

7. **Resolver las ecuaciones exponenciales.**

a. $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} = 27$

b. $2^x + 2^{x+2} = 40$

c. $7^{x-1} = 1$

d. $7^{x+2} = 343$

e. $10^{4x+6} = 1$

f. $5^{x+1} = 0{,}2$

g. $27^{x+1} = 9^{x+3}$

h. $2^x . 2^{x+1} = 32$

i. $5^{x^2-3x} = 625$

j. $\sqrt{3^{5x-11}} = 9$

k. $\sqrt{2^{5x-7}} = \sqrt{2^{x-2}}$

l. $2^{2x+2} + 2^{x+3} = 320$

m. $9^x + 3^x = 90$

n. $3.2^{x^2-1} = 3$

<u>Ecuaciones logarítmicas</u>

Una ecuación es logarítmica cuando la incógnita está afectada por la logaritmación

Para resolver ciertas ecuaciones logarítmicas se debe aplicar la definición de dicha operación matemática. Luego de obtenidos los valores, se debe verificar descartando aquellos que no cumplan con la condición de la logaritmación.

- **<u>Caso 1:</u>** aplicando la definición.

<u>Ejemplo:</u> $\log_2(x-1) = -1$

$2^{-1} = x - 1$

$\frac{1}{2} + 1 = x$

$\frac{3}{2} = x$

- **<u>Caso 2</u>**: aplicación de propiedades.

<u>Ejemplo</u>: $\log_3(x+4) + \log_3(x-4) = 2$

$\log_3[(x+4).(x-4)] = 2$ (se aplica la propiedad: $\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y$)

$3^2 = (x+4).(x-4)$ (se aplica la definición de logaritmo)

$9 = x^2 - 16$

$25 = x^2 \Rightarrow \pm 5 = x$

- **Caso 3:** cambio de variable

Ejemplo: $log_2^2 x - 5.\log_2 x = -4$

$$log_2^2 x - 5.\log_2 x + 4 = 0$$

Realizamos un cambio de variable: $\log_2 x = z$

$$z^2 - 5z + 4 = 0$$

Aplicamos formula resolvente para encontrar los valores de z:

a=1 b=-5 c=4

$$z_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.4}}{2.1}$$

$$z_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} z_1 = 4 \\ z_2 = 1 \end{cases}$$

Por último, sustituimos z en el cambio de variable:

1) $\log_2 x = z_1$

$\log_2 x = 4$

$2^4 = x$

$16 = x$

2) $\log_2 x = z_2$

$\log_2 x = 1$

$2^1 = x$

$2 = x$

- **Caso 4:** cambio de base

Ejemplo: $\log_3 x - \log_9 x = 1$

Aplicamos el cambio de base para que ambos logaritmos sean base 3: $\log_9 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 9} = \frac{\log_3 x}{2}$

Reemplazamos y resolvemos: $\log_3 x - \frac{\log_3 x}{2} = 1$

$$\frac{1}{2}.\log_3 x = 1$$

$$\log_3 x = 2$$

$$3^2 = x$$

$$9 = x$$

8. Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a. $\log_5(x^2 + 1) = 1$

b. $3.\log_x 81 = -12$

c. $\frac{2.\log_2 x - 3}{3} = 1$

d. $\log_2(x + 1).(x + 2) = 1$

e. $\log_{2x-7}(x - 2) + \log_{2x-7} 3 = 2$

f. $\log_2(2x + 2) - \log_2(-x + 2) = 2$

g. $2.\log_4(x - 1) + \log_4(x - 1) = 6$

h. $\log_x 3 + \log_x 6 = \log_x 2 - 2$

i. $2.\log_2 x^2 - 2.\log_2 x = 4$

j. $\log_3 x + \log_9 x = \log_{81} x + \frac{5}{2}$

k. $log_3^2(x - 1) + \log_3(x - 1) = 6$

l. $\log_6(x - 1) = 3 - \log_6(5x + 1)$

m. $\log_x(2x - 2) + \log \ x(3x - 4) = 2$

n. $\ln(x + 3)^2 - \ln(x + 7) - \ln 2x = 0$

Unidad 6: Progresiones aritméticas y geométricas.

Sucesiones.

Una **sucesión** es un conjunto ordenado de números, uno a continuación del otro. El conjunto de los números naturales es una sucesión de infinitos elementos.

Se denomina **término** a cada uno de los elementos de la sucesión.

Ejemplo:

$$\begin{array}{cccccccc} 1; & 8; & 27; & 64; & 125; & 216; & \dots & n^3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & \dots & a_n \end{array}$$

En algunas sucesiones se puede encontrar un **término general a_n (término enésimo),** que es la fórmula de un término cualquiera de la función del lugar que ocupa.

En la sucesión 1;8;27;125;216;…, el termino general de la sucesión es $a_n = n^3$

Si se conoce el termino general, se puede hallar la sucesión, o cualquier término de la misma, reemplazando en forma consecutiva los números naturales en el valor **n** del término general.

Si el término general de una sucesión es $a_n = \frac{1}{n}$ entonces la sucesión será:

$$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \dots; \frac{1}{n}$$

Por lo tanto, una sucesión es una función que le asigna a todo número natural un número real:

$$f: N \to R$$

Sucesiones Aritméticas.

Se denomina **sucesión aritmética** a aquella en la cual cada término de la misma se obtiene sumando al anterior un número constante **r** llamado **razón aritmética.**

En símbolos: $\boxed{a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = r}$

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 + 0r \\ a_2 &= a_1 + 1r \\ a_3 &= a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r \\ a_4 &= a_3 + r = a_1 + r + r + r = a_1 + 3r \\ \hline a_n &= a_{n-1} + r = a_1 + \underbrace{r + r + \dots + r}_{n-1 \text{ veces}} = a_1 + (n-1) \cdot r \end{aligned}$$

El término general a_n es:
$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

Ejemplo:

4 → 12 → 20 → 28 → 36 ... ⟶ Sucesión aritmética con r = 8.

4 + 8 12 + 8 20 + 8 28 + 8

- Para calcular un **término determinado** de una sucesión aritmética **conociendo dos términos consecutivos,** se deben seguir estos pasos:

1. Se halla la razón r
2. Se calcula cada término

<u>Ejemplo:</u>

Calcular a_6 si $a_1 = -3$ y $a_2 = 5$

1. Hallamos la razón r: $r = a_2 - a_1 = 5 - (-3) = 8$
2. Calculamos a_6: $a_6 = a_1 + (6-1).r = -3 + 5.8 = 37$

- Para calcular un **término determinado** de una sucesión aritmética **conociendo otro término y la razón**, se deben seguir los siguientes pasos:

<u>Ejemplo:</u> Calcular a_3 si $a_9 = -28$ y $r = -9$

1. Se considera a a_3 como primer término ($a_3 \rightarrow a_1$) y a $a_9$como séptimo termino ($a_9 \rightarrow a_7$)
2. Se reemplaza en la fórmula: $a_n = a_1 + (n-1).r \Rightarrow a_7 = a_1 + (7-1).r$

$$-28 = a_1 + 6.(-9)$$
$$-28 + 54 = a_1$$
$$26 = a_1 \qquad \Rightarrow a_3 = 26$$

- Para calcular el **número de términos** de una sucesión aritmética, se deben seguir los siguientes pasos:

<u>Ejemplo:</u> Calcular el **número de términos** de la sucesión sabiendo que:

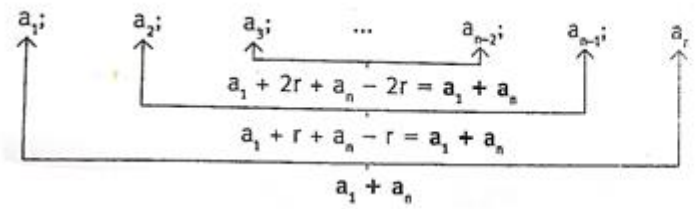
$$a_1 = 5;\ a_2 = 19; \dots; a_n = 145$$

1. Se calcular el valor de la razón r: $r = a_2 - a_1 = 19 - 5 = 14$
2. Se aplica la formula general: $a_n = a_1 + (n-1).r$

$$145 = 5 + (n-1).14$$
$$145 - 5 = (n-1).14$$
$$140 : 14 = n - 1$$
$$10 = n - 1$$
$$11 = n$$

<u>Suma de los términos de una sucesión aritmética</u>

La suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética se obtiene de la siguiente manera:



La suma de los n primeros términos es:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

- Para calcular la suma de los términos de una sucesión aritmética se deben conocer el primer término, el último y la cantidad de términos.

<u>Ejemplo:</u> calcular la suma de todos los números pares comprendidos entre 46 y 112 inclusive.

$112 = 46 + 2.(n-1)$

$66 = 2.(n-1)$

$33 = n - 1$

$34 = n$

$S_n = \frac{(46+112).34}{2} \Rightarrow S_n = 2686$

1. **Completar con el dato que falta en cada caso.**

a. $a_1 = -\frac{12}{5}; r = 5$ Calcular: a_{12}

b. $a_{120} = 1345; r = -9$ Calcular: a_1.

c. $a_n = 153{,}32; a_1 = \frac{83}{25}; r = 25$ Calcular: n

2. **Calcular la suma de los 30 primeros términos.**

a. Dada la sucesión aritmética cuyo término general es: $a_n = -12 + 5.n$

b. Dada la sucesión: -4, -10, -16, -22, …….

3. **Resolver teniendo en cuenta que en una sucesión aritmética $\boldsymbol{a_1 + a_3 = 18\ y\ \ a_5 - a_2 = -6}$**

a. ¿Cuál es la razón?

b. Calcular: $a_1; a_2; a_3$.

4. Franco decidió ahorrar dinero para comprarse una notebook. Si empezó reservando $1000 y cada mes agrega $260. ¿Cuánto dinero tendrá después de un año?

<u>Sucesiones Geométricas</u>

En una sucesión geométrica cada término se obtiene multiplicando el anterior por un valor constante q.

$$a_1 = a_1 \cdot q^0$$
$$a_2 = a_1 \cdot q^1$$
$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$
$$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot q \ldots q}_{n-1 \text{ veces}} = a_1 \cdot q^{n-1}$$

El término general a_n es:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

- Para calcular un término determinado de una sucesión geométrica **conociendo dos términos consecutivos**, se deben seguir los siguientes pasos:

1. Se halla la razón q.
2. Se calcula cada término

<u>Ejemplo:</u> calcular a_6 si $a_1 = 2\ y\ a_2 = 8$

- Calculamos q: $q = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow q = 4$
- Hallamos a_6: $a_6 = a_1 . q^{n-1} \Rightarrow a_6 = 2.4^5 = 2048$

La razón es igual al cociente entre dos términos consecutivos: $q = \frac{a_k}{a_{k-1}} \wedge k \in N - \{1\}$

- Para calcular un término determinado de una sucesión geométrica **conociendo otro término y la razón,** se deben seguir los siguientes pasos:

<u>Ejemplo:</u> Calcular a_4 si $a_{11} = 8748\ y\ q = 3$

Se considera a a_4 como primer término $(a_4 \rightarrow a_1)\ y\ a\ a_{11}$ como octavo término $(a_{11} \rightarrow a_8)$.

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$
$$a_8 = a_1 . 3^{8-1}$$
$$8748 = a_1 . 2187$$
$$\frac{8748}{2187} = a_1$$
$$4 = a_1$$

- Para calcular el **número de términos** de una sucesión geométrica, se deben seguir los siguientes pasos:

<u>Ejemplo:</u> calcular el número de términos de la sucesión geométrica sabiendo que

$a_1 = \frac{3}{4};\ a_2 = \frac{1}{2}; \ldots; a_n = \frac{8}{81}$

<u>Resolución:</u> $q = \frac{a_1}{a_2} \Rightarrow q = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$
$$\frac{8}{81} = \frac{3}{4} . \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$
$$\frac{32}{243} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$
$$5 = n - 1 \Rightarrow n = 6$$

Suma de los términos de una sucesión geométrica

La suma de los n primeros términos de una sucesión geométrica se obtiene de la siguiente manera:

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1} \quad (1)$$

$$- \quad S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n \quad (2) \longleftarrow \text{Se multiplican ambos miembros de (1) por } q.$$

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1} \quad (1)$$

$$S_n \cdot q - S_n = -a_1 + a_1 \cdot q^n \longleftarrow \text{Se resuelve (2) – (1)}$$

$$S_n \cdot q - S_n = -a_1 + a_1 \cdot q^n \Rightarrow S_n \cdot (q-1) = a_1 \cdot (-1 + q^n) \Rightarrow S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \wedge q \neq 1$$

5. Completar con el dato que falta en cada caso.

a. $a_1 = -9; q = 2$ Calcular a_{11}

b. $a_{25} = 122; q = \frac{1}{3}$ Calcular a_1

c. $a_n = 2048; a_1 = 4; q = \frac{1}{3}$ Calcular n.

6. Calcular la suma de los 11 primeros términos.

a. Sea la sucesión geométrica de término general $a_n = 3.2^{n-1}$

b. Sea la sucesión geométrica 3; 12; 48; 192; 768;…

7. En una sucesión de razón 1,5, la suma de los dos primeros términos es 1,7. Calcular la suma de los 5 primeros términos.

8. El producto entre el segundo y el tercer término de una sucesión es 5400. Calcular la razón y la suma de los primeros 12 términos, si el primero término es 5

Análisis de sucesiones

Existen muchas situaciones en las cuales puede aplicarse el concepto de sucesión para resolver diversos problemas de índole práctica.

Cotas superiores e inferiores

Una sucesión está acotada superiormente, si $\exists k \in \frac{R}{\forall n} \in N: k \geq a_n$. Se dice que k es cota superior en la sucesión.

Una sucesión está acotada inferiormente, si $\exists k \in \frac{R}{\forall n} \in N: k \leq a_n$. Se dice que k es cota inferior en la sucesión.

El **supremo** es la menor de las cotas superiores de una sucesión y el **ínfimo** es la mayor de las cotas inferiores de una sucesión.

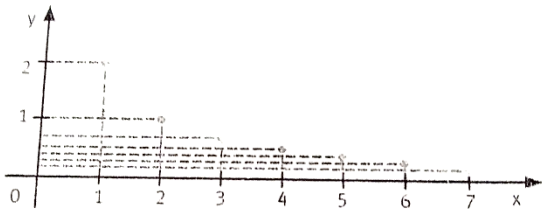
Una sucesión es **monótona creciente**, si $\forall n \in N: a_n \geq a_{n-1}$

Una sucesión es **monótona decreciente**, si $\forall n \in N: a_n \leq a_{n-1}$

Ejemplo: Si el término general de una sucesión es $a_n = \frac{2}{n}$, entonces la sucesión será:

$2; 1; \frac{2}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{5}; \frac{1}{3}; \frac{2}{7}; \ldots$

En el gráfico están representados los valores que toma la sucesión.

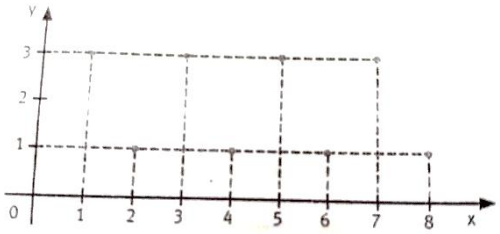


- Esta sucesión está acotada superior e inferiormente.
- En este ejemplo, 2, 4, 8, 100, e, π son cotas superiores y 0, -1, -3, $-\frac{3}{4}$ son cotas inferiores.
- El supremo es 2 y el ínfimo es 0.
- También se afirma que esta sucesión es monótona decreciente, al ser cada término menor que el anterior.

Ejemplo: Si el término general de una sucesión es $a_n = 2 - (-1)^n$, entonces la sucesión será:

$3; 1; 3; 1; 3; 1; 3 \ldots.$

En el gráfico están representados los valores que toma la sucesión.



- Esta sucesión está acotada; admite cotas superiores y cotas inferiores
- El supremo es 3 y el ínfimo es 1.
- Esta sucesión no es ni monótona decreciente ni monótona creciente.
- Otra manera de definir esta sucesión es : $a_n = \begin{cases} 3 \; si \; n \; es \; impar \\ 1 \; si \; n \; es \; par \end{cases}$

9. Indicar si las siguientes sucesiones son monótonas crecientes o decrecientes. Explicar las respuestas.

a. $a_n = \frac{n-1}{n}$

b. $a_n = -2.n$

c. $a_n = (-1)^n.n$

10. Indicar si las siguientes sucesiones están acotadas. Escribir tres cotas superiores y/o inferiores, el infimo y el supremo, cuando sea posible. Realizar un gráfico si es necesario.

a. 1; 0,8; 0,5; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001….

b. 4; 0; -4; -8; -12; -16; -20; …..

c. 5;-5;5;-5;5;-5;….

Clasificación de sucesiones

- **Sucesiones convergentes**

Cuando a medida que n crece, los términos de la sucesión se van acercando a un número, se dice que la **sucesión es convergente**.

Ejemplo: Si el término general de una sucesión es $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, entonces la sucesión será:

$$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}; \frac{1}{64}; \ldots$$

A medida que crece, la sucesión se va acercando a cero. Se dice que la sucesión converge a 0 o que su límite es 0.

- **Sucesiones divergentes**

Cuando a partir de $n \in N$, los módulos de los términos de la sucesión son mayores que cualquier número positivo k, la **sucesión es divergente**.

Ejemplo: si el término general de una sucesión es $a_n = 2.n$, entonces la sucesión será:

2;4;6;8;10;12;14;…

La sucesión diverge porque para cualquier numero positivo k, existe un n tal que $a_n > k$

Para k=2.300.000, exite n=1150001, tal que $a_n = 2300002 > k$

A medida que crece, la sucesión se va acercando a valores cada vez más altos. Se dice que la sucesión diverge a $+\infty$ o que su límite es $+\infty$.

- **Sucesiones Oscilantes**

Cuando una sucesión **no es convergente ni divergente**, es oscilante.

Ejemplo: si el termino general de una sucesión es $a_n = 2 - (-1)^n$, entonces la sucesión será:

3;1;3;1;3;….

Esta sucesión oscila entre los números 1 y 3. En este caso, la sucesión no tiene límite. Por lo tanto, es oscilante.

- **Sucesiones definidas por recurrencia**

Una sucesión está definida por recurrencia si para definir el termino enésimo se utilizan términos anteriores de la sucesión.

Ejemplo:

$a_1 = 1; a_2 = a_1 + 2; a_3 = a_2 + 3; \ldots; a_n = a_{n-1} + n \Rightarrow a_2 = 1 + 2; a_3 = 1 + 2 + 3; a_4 = 1 + 2 + 3 + 4$

En general, tenemos que a_n es la suma de los n primeros números naturales. En este caso, se puede expresar con la fórmula: $a_n = \frac{n.(n-1)}{2}$

11. Clasificar las siguientes sucesiones en convergentes, divergentes u oscilantes. Si es posible, calcular el límite.

a. 5;4,5; 4; 3,5; 3,3; 3,1; 3,01;3;001; 3,0001;…

b. 10; 100; 1000; 10000; 100000; 1000000;…

c. -2;3;-2;3;-2;3;-2;3;…

12. Clasificar las siguientes sucesiones en convergentes, divergentes u oscilantes. Si es posible, calcular su límite.

a. $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

b. $a_n = n^2 - 3.n$

c. $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$

d. $a_n = \begin{cases} 3 \; si \; n \; es \; par \\ 5 \; si \; n \; es \; impar \end{cases}$

13. Proponer para cada caso, si es posible, el termino general de una sucesión que cumpla las condiciones pedidas.

a. Una sucesión de términos negativos que sea divergente.

b. Una sucesión de términos positivos que sea convergente a 2.

c. Una sucesión oscilante que cumpla que para todo n: $-2 \leq a_n \leq 2$